

Általánosított n -oldalú Bézier felületek (S-patch-ek) vizsgálata

Benyhe Ágota BME-TTK

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
Irodalmi előzmények	1
Bézier-görbék	1
Bézier-háromszögek	2
Feladat	3
Munkám	3
Összefoglalás	7
Hivatkozások	7

Bevezetés

A címben szereplő témát Dr. Várady Tamás tanár úrtól kaptam, akinél tavaly a 3D-s számítógépes geometria tárgyat hallgattam.

A számítógépes geometriai modellezés egyik feladata olyan felületreprezentációk létrehozása, amelyek alkalmasak komplex szabadformájú alakzatok tervezésére és bonyolult geometriai számítások elvégzésére. A tenzor-szorzat Bézier felület egy jól ismert matematikai formula négyoldalú felületek leírására, ugyanakkor sok esetben általános n -oldalú felületelemek összeépítésére van szükség. A Bézier-felületek kiterjesztésének egyik lehetősége, az úgynevezett S-patch-ek használata. Itt egy n -oldalú szabályos domén poligont képezünk le, és n baricentrikus koordináta valamint általánosított Bernstein-függvények segítségével adjuk meg a felületeket.

Irodalmi előzmények

Bézier-görbék

Az n -edfokú Bézier-görbe paraméterezése:

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k B_k^n(u) = \mathbf{r}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i+j=n} \mathbf{c}_{i,j} B_{i,j}^n(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i+j=n} \mathbf{c}_{i,j} \frac{n!}{i!j!} \lambda_1^i \lambda_2^j$$

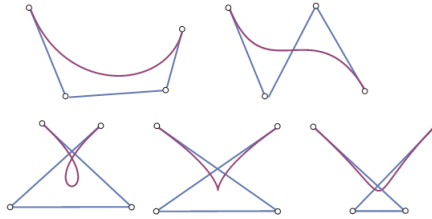
ahol:

$u \in [0, 1]$

λ_1, λ_2 baricentrikus koordináták: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$B_k^n(u)$: n -edfokú Bernstein-polinom

A görbe kontroll poligonja: $\mathbf{c}_k, k \in \{1, \dots, n\}$



1. ábra. 3-adfokú Bézier-görbék

Bézier-háromszögek

Belső domén pontokat a csúcsok kombinációival a baricentrikus koordinátákkal írhatjuk fel.

Csúcsok:

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$$

Tetszőleges belső pont:

$$\mathbf{u} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2 + \lambda_3 \mathbf{p}_3$$

,

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

Háromváltozós Bernstein-polinomok:

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k, \mathbf{i} = (i, j, k), i + j + k = n, \binom{n}{\mathbf{i}} = \frac{n!}{i!j!k!}$$

Bézier-háromszög paraméterezése:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Feladatom

Általános n -edfokú Bézier görbék megjelenítése és tesztprogram írása n -oldalú S-patch-ek szemléltetésére a Mathematica programcsomag használatával.

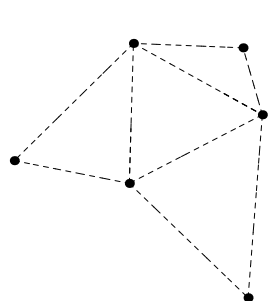
Munkám

`BenyheAgota_Bezier.nb`

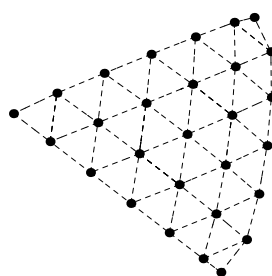
A Mathematica programcsomag segítségével megjelenítettem általános n -edfokú Bézier-görbéket. A kontrollpontok mozgásával változtatható a görbe alakja.

Az n -oldalú Bézier-felületek pontjainak baricentrikus koordinátáit a Wachspress-koordináták segítségével határozzuk meg. [1, 3-4. oldal]

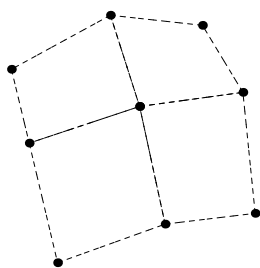
A kontroll háló pontjainak szomszédsági rendszere speciális szabály szerint számolandó. [2, 213-216. oldal]



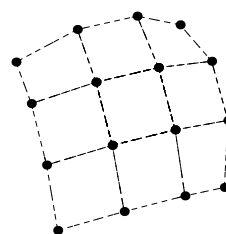
(a) Másodfokú



(b) Hatodfokú

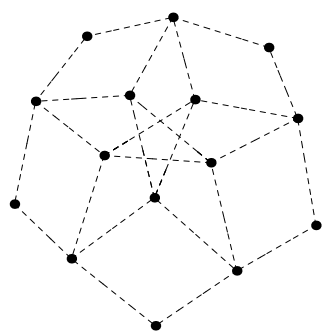


(c) Másodfokú

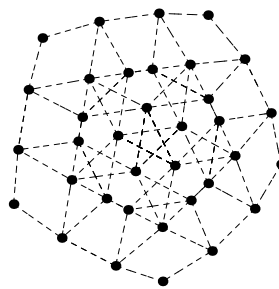


(d) Harmadfokú

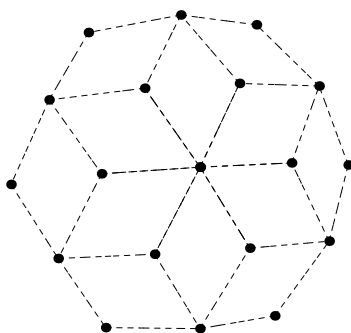
2. ábra. 3 oldalú és 4 oldalú kontroll hálók



(a) Másodfokú

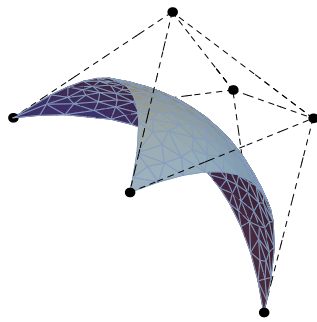


(b) Harmadfokú

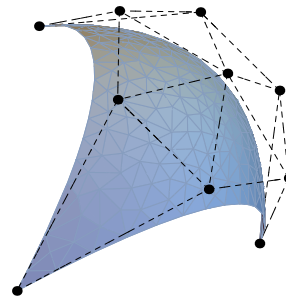


(c) Másodfokú

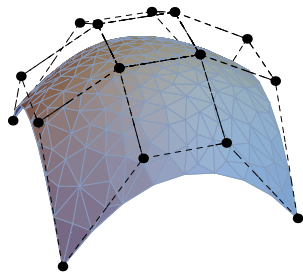
3. ábra. 5 oldalú és 6 oldalú kontroll hálók



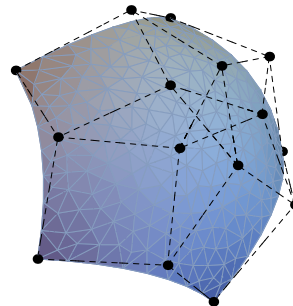
(a) 3 oldalú másodfokú



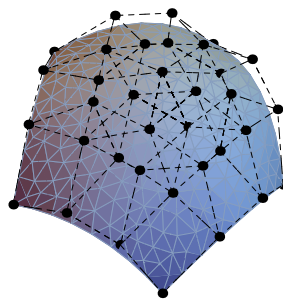
(b) 3 oldalú harmadfokú



(c) 4 oldalú harmadfokú



(d) 5 oldalú másodfokú



(e) 5 oldalú harmadfokú

4. ábra. Bézier-felületek

Összefoglalás

Mathematicában a BezierCurve függvény (SplineDegree opcióval) ugyanazt a képet adja vissza, mint amit az általam írt függvény kirajzol a Bézier-görbe fejezetben. Újításom a görbe alakjának változtathatósága a kontrollpontok mozgatásával.

A Bézier-felületek témakörében hoztam létre újdonságot, ugyanis a Mathematica BezierFunction nevű beépített függvénye csak és kizárólag 4 oldalú Bézier-felületet tud megjeleníteni, míg az én Bézier-felület fejezetben található ShowBezier[n,d] függvényem megjelenít egy szabályos n-oldalú d-edfokú Bézier-felületet és annak kontroll hálóját. A futásidő nagyobb számoknál igen hosszú. További fejlesztési lehetőség: megoldani, hogy a 3 dimenziós térben mozgatni lehessen a kontrollpontokat, aminek hatására a felület megváltozik.

Hivatkozások

- [1] K. Hormann and M. S. Floater. Mean value coordinates for arbitrary planar polygons. *ACM Transactions on Graphics*, October 2006.
- [2] Charles T. Loop and Tony D.DeRose. A multisided generalization of bézier surfaces. *Transactions on Graphics*, July 1989.