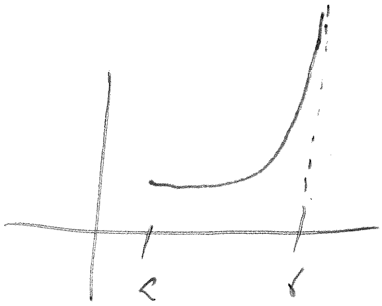
IMPROPRIUS INTEGRÁL

Cél: $[a,b]$-ben nem korlátos fv integrálhatóságának és nem korlátos tartományon vett integrálok értelmezése.

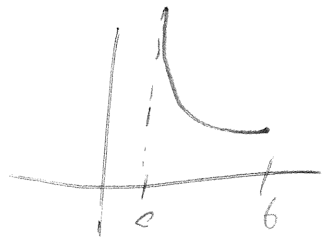
I. típusú integrál

Def 1. Tfh $f(x)$ az $[a,b[$-ben folyt és nem korlátos ha $x \to b-0$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d \to b-0} \int_a^d f(x)\,dx$$

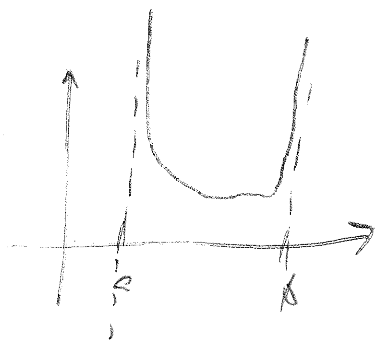


2. Tfh $f(x)$ az $]a,b]$-ben folyt és nem korlátos ha $x \to a+0$.



Ekkor $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)\,dx.$

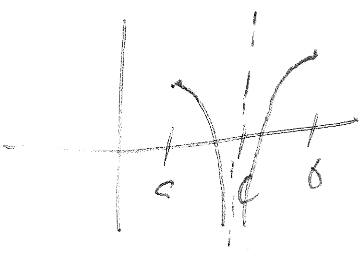
3. Tfh $f(x)$ folyt $]a,b[$-ben, de nem korlátos ha $x \to a+0$ vagy $x \to b-0$. Ekkor



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to a+0 \\ d \to b-0}} \int_c^d f(x)\,dx.$$

4. Tfh $a<c<b$ és $f(x)$ folyt $[a,c[$ és $]c,b]$-ben, de nem korlátos ha $x \to c$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



Ha az előző határértékek véges értéket adnak, akkor az improprius integrált konvergensnek egyébként divergensnek mondjuk.

Pl. 1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0+0} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0+0} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0+0} 2-2\sqrt{c} = 2$

2. $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+0} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+0} [\ln x]_c^1 = \lim_{c\to 0+0} \ln 1 - \ln c = +\infty$ div

3. $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{d\to 0-0} \int_{-1}^d x^{-1/3}\,dx = \lim_{d\to 0-0} \left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_{-1}^d = \lim_{d\to 0-0} \frac{3}{2} d^{2/3} - \frac{3}{2}(-1)^{2/3} = \frac{3}{2}$

4. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{c\to 1-0\\ d\to -1+0}} \int_d^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{c\to 1-0\\ d\to -1+0}} [\arcsin x]_d^c =$

$\lim_{\substack{c\to 1-0\\ d\to -1+0}} \arcsin c - \arcsin d = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

5. $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0+0} \int_c^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0+0} [x\ln x - x]_c^1 =$

$\int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - \int \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{1}\,dx = x\ln x - x$

$v' \quad u$

$v = x \quad u' = \frac{1}{x}$

$\lim_{c\to 0+0} (c\ln c - c) - (1\cdot\ln 1 - 1) = 1$

$\lim_{c\to 0+0} c\cdot\ln c = 0\cdot\infty = \lim_{c\to 0+0} \frac{\ln c}{1/c} \overset{L'H}{=} \lim_{c\to 0+0} \frac{1/c}{-1/c^2} = 0$

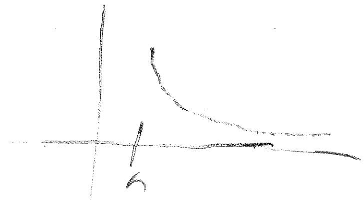
$-c$

6. $\int_0^9 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \int_1^9 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to 1-0}\int_0^d (x-1)^{-2/3}\,dx +$

$\lim_{c\to 1+0}\int_c^9 (x-1)^{-2/3}\,dx = \lim_{d\to 1-0}\left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_0^d + \lim_{c\to 1+0}\left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_c^9 =$

$\lim_{d\to 1-0} 3(d-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3} + \lim_{c\to 1+0} 3(9-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3} = 3+6=9.$

II. típusú improprius integrál



Def 1, $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{d\to +\infty}\int_a^d f(x)\,dx$

2. $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to -\infty}\int_c^b f(x)\,dx$

3., $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{c\to -\infty\\ d\to +\infty}}\int_c^d f(x)\,dx$

Meg. 1. Ha $f(x)\geq 0$ akkor a fenti improprius integrál az $f(x)$ alatti területet méri.

2. Ha a fenti határértékek végesek, akkor az improprius integrált konvergensnek, ha végtelen, akkor divergensnek mondjuk.

Pl. 1. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{d\to\infty}\int_0^d e^{-x}\,dx = \lim_{d\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^d = \lim_{d\to\infty} -e^{-d}-(-e^{0}) =$

$\lim_{d\to\infty} 1-e^{-d} = 1$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^{-2}\frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^{-2}\frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}\,dx$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1}$$

$A+B=0 \Rightarrow B=-A$

$A-B=1 \Rightarrow 2A=1 \Rightarrow A=1/2,\ B=-1/2$

$$=\lim_{c\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_c^{-2}=$$

$$=\lim_{c\to-\infty}\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 1-\left(\frac{1}{2}\ln|c-1|-\frac{1}{2}\ln|c+1|\right)=$$

$$=\lim_{c\to-\infty}\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{c-1}{c+1}\right|=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 1=\frac{1}{2}\ln 3$$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+4x^2}\,dx=\lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}}\int_c^d\frac{1}{1+(2x)^2}\,dx=\lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}}\left[\frac{\operatorname{arctg}2x}{2}\right]_c^d=$

$$\lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}}\frac{\operatorname{arctg}2d}{2}-\frac{\operatorname{arctg}2c}{2}=\frac{\pi/2}{2}-\left(-\frac{\pi/2}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

4. p-kritérium $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & \text{azaz konv ha } p>1\\ +\infty, & \text{azaz div ha } p\le 1\end{cases}$

Tfh $p>1$: $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{d\to+\infty}\int_1^d x^{-p}\,dx=\lim_{d\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^d=$

$$\lim_{d\to\infty}\frac{d^{-p+1}}{1-p}-\frac{1^{-p+1}}{-p+1}=\frac{1}{1-p}$$

Tfh $p=1$: $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{d\to\infty}\int_1^d\frac{1}{x}\,dx=\lim_{d\to\infty}\left[\ln x\right]_1^d=\lim_{d\to\infty}\ln d-\ln 1=+\infty.$

Tfh. $p<1$. $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{d\to\infty}\int_1^d \frac{1}{x^p}dx = \lim_{d\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^d =$

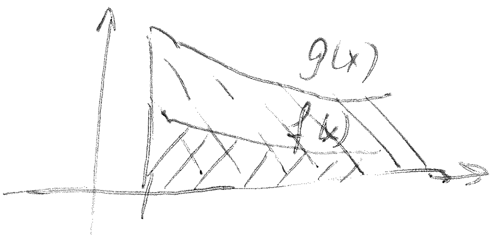
$$\lim_{d\to\infty} \frac{d^{\overbrace{-p+1}^{>0}}}{\underbrace{-p+1}_{>0}} - \frac{1^{-p+1}}{1-p} = +\infty$$

Hogyan lehet eldönteni, hogy egy II típusú improprius integrál konvergens vagy divergens?

<u>Konvergenciakritériumok</u>

<u>Majoráns kritérium</u>: Legyen $f(x)\geq 0$ $x\geq a$ esetén. Ha létezik $g(x)\geq 0$, hogy $g(x)\geq f(x)$ ha $x\geq a$ és $\int_a^\infty g(x)dx$ konv, akkor $\int_a^\infty f(x)dx$ is konv.

<u>Biz</u>

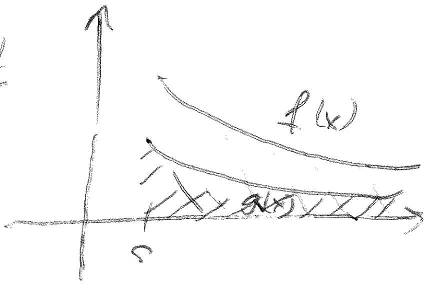


$\int_a^\infty f(x)dx$ konv $\Leftrightarrow$ /// terület véges

Tudjuk $\int_1^\infty g(x)dx$ konv, azaz \\\ terület véges $\Rightarrow$ /// is véges.

<u>Minoráns kritérium</u> Legyen $f(x)\geq 0$ ha $x\geq a$. Ha létezik $g(x)\geq 0$ for melyre $f(x)\geq g(x)$ és $\int_1^\infty g(x)dx$ div, akkor $\int_a^\infty f(x)dx$ is div.

<u>Biz</u>



$\int_a^\infty g(x)dx$ div $\Leftrightarrow$ /// terület ∞.

$\Rightarrow$ \\\ terület ∞ $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx = +\infty$, azaz div.

Pl. 1, $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+5}\,dx$: tudjuk $\frac{1}{e^x} > \frac{1}{e^x+5}$ és $\int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{e^{-x}}dx$ ~~abs~~ konv

$\overset{\text{majoráns}}{\Rightarrow} \int_0^\infty \frac{1}{e^x+5}\,dx$ is konv

2, $\int_1^\infty \frac{1}{e^{x^2}}\,dx$: tudjuk, hogy $x \geq 1$ esetén $x^2 \geq x \Rightarrow$

$0 < \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x}$ és $\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ konv $\overset{\text{majoráns}}{\Rightarrow}$ $\int_1^\infty \frac{1}{e^{x^2}}\,dx$ is konv

3, $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$: tudjuk, hogy $x^2+\sqrt{x} > x^2$ ha $x \geq 1$,

ezért az $\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{1}{x^2}$, de $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ konv $\overset{\text{majoráns}}{\Rightarrow}$ $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx$ konv

4, $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{x}\,dx$: tudjuk, hogy $\sin x \geq -1$, ezért

$2+\sin x \geq 1$, így $\frac{2+\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$. mivel $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ div

$\overset{\text{minoráns}}{\underset{\text{krit}}{\Rightarrow}}$ $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{x}\,dx$ is div

<u>Limesz összehasonlító kritérium</u>: Legyen $f(x)$ és $g(x) > 0$ ha $x \geq a$. Ha $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, akkor $\int_a^\infty f(x)dx$ és $\int_a^\infty g(x)dx$ vagy egyszerre konvergens vagy egyszerre div.

Pl. 1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$: $f(x)=\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{x^2}}_{\frac{1}{x^{3/2}}}}=1$$

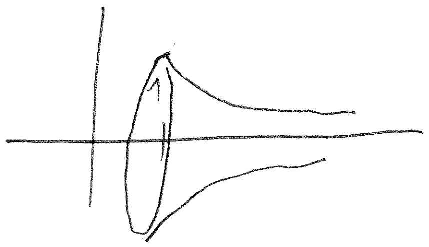
és $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konv $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$ konv

2. $\int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$: $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\underbrace{\frac{1}{x^{1/6}}}_{\to 0}}=\frac{1}{2}$$

és $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ div $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$ is div

3. Az $y=\frac{1}{x}$-et $x\geq 1$ megforgatjuk az x tengely körül



Térfogat véges?

Felszín véges?

$y'=-\frac{1}{x^2}$

$$V=\pi\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{véges}$$

$$F=2\pi\int\frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx=2\pi\int_1^\infty\underbrace{\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}_{f(x)}\,dx$$

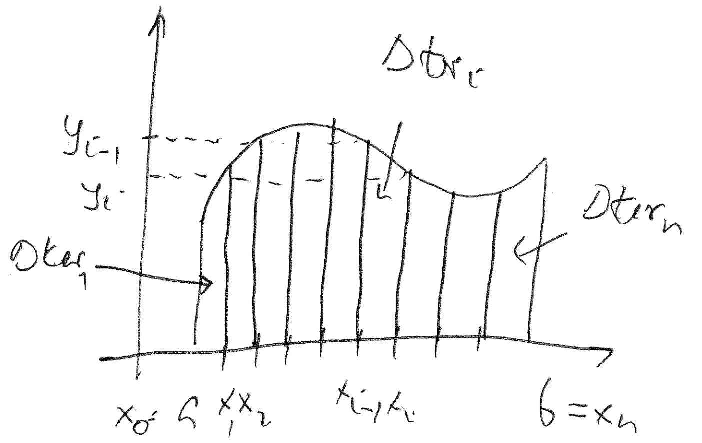
$g(x)=\frac{1}{x}$: $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}=1$ és

$\int_1^\infty\frac{1}{x}\,dx$ div $\Rightarrow \int_1^\infty\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$ is div.

Numerikus integrálás

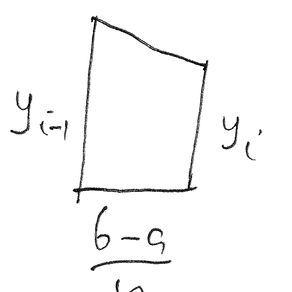
Feladat: $\int_a^b f(x)\,dx$ közelítése

1. Trapézszabály



Az $[a,b]$ intervallumot n db egyenlő részre bontjuk.

Δter_i-et a



trapéz területével közelítem

$y_i = f(x_i)$

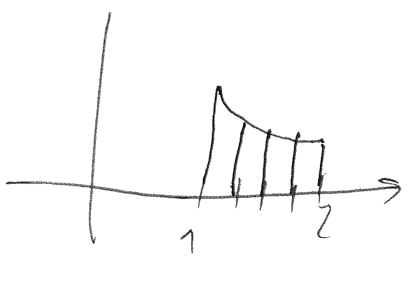
trapéz területe $= \dfrac{y_{i-1}+y_i}{2}\cdot\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b-a}{2n}(y_{i-1}+y_i)$

Így $ter = \int_a^b f(x)dx \approx \Delta ter_1 + \Delta ter_2 + \Delta ter_3 + \dots + \Delta ter_n$

$\approx \dfrac{b-a}{2n}(y_0+y_1) + \dfrac{b-a}{2n}(y_1+y_2) + \dfrac{b-a}{2n}(y_2+y_3) + \dots + \dfrac{b-a}{2n}(y_{n-1}+y_n)$

$= \dfrac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$

Pl. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ közelítése $n=4$ osztóponttal, $b=2$, $a=1$, $n=4$



$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{8}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) \overset{*}{=}$

$y_0 = f(1) = 1$, $y_1 = f(\frac{5}{4}) = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$,

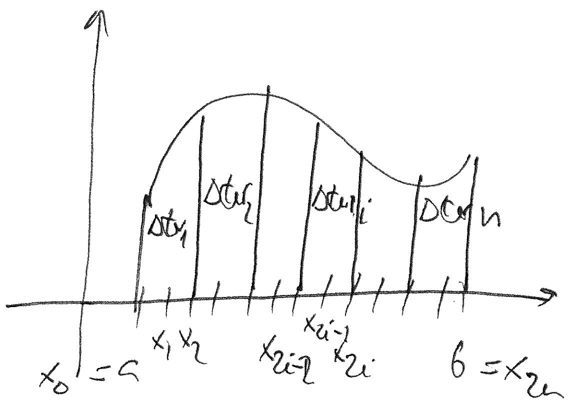
$y_2=f\left(\frac{6}{4}\right)=\frac{1}{6/4}=\frac{4}{6}$, $y_3=f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{1}{7/4}=\frac{4}{7}$, $y_4=\frac{1}{8/4}=\frac{4}{8}$

$$\overset{\circledast}{=}\frac{1}{8}\left(1+2\cdot\frac{4}{5}+2\cdot\frac{4}{6}+2\cdot\frac{4}{7}+1\cdot\frac{4}{8}\right)=0{,}697023$$

Valójában $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx=[\ln x]_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2=0{,}693147$

hiba $=-0{,}003876$

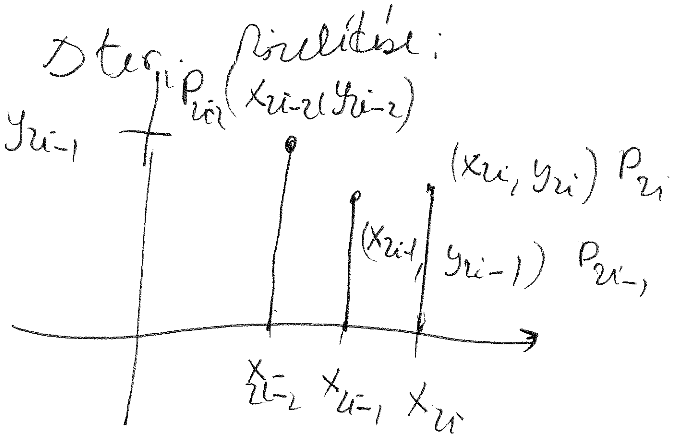
Simpson-szabály



Az $[a,b]$ intervallumot $2n$ db egyenlő részre bontjuk.

$$t = \int_a^b f(x)\,dx = \Delta t_1+\Delta t_2+\dots+\Delta t_n$$

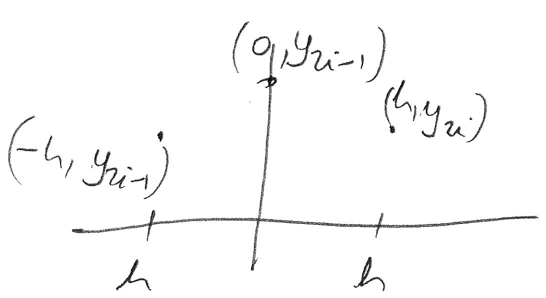
Δt_i közelítése:



Az P_{2i-2}, P_{2i-1}, P_{2i} pontokon át parabolát fektetünk, az ez alatti területet adja Δt_i közelítését.

Kennyível egyenlő a parabola alatti terület!

Fektessünk parabolát a



pontokon keresztül, $h=\frac{b-a}{2n}$

$y=ax^2+bx+c$

$y(-h)=ah^2-bh+c=y_{2i-2}$

$y(0)=c=y_{2i-1}$

$y(h)=ah^2+bh+c=y_{2i}$

$$y_{2i} - y_{2i-2} = 2bh \Rightarrow b = \frac{y_{2i} - y_{2i-2}}{2h}$$

$$y_{2i-2} + y_{2i} = 2ah^2 + 2c \Rightarrow a = \frac{y_{2i-2} + y_{2i} - 2c}{2\cancel{a}h^2} = \frac{y_{2i-2} + y_{2i} - 2y_{2i-1}}{2h^2}$$

$$y = \frac{y_{2i-2} + y_{2i} - 2y_{2i-1}}{2h^2} x^2 + \frac{y_{2i} - y_{2i-2}}{2h} x + y_{2i-1}$$

A parabola alatti terület:

$$\int_{-h}^{h} \frac{y_{2i-2} + y_{2i} - 2y_{2i-1}}{2h^2} x^2 + \frac{y_{2i} - y_{2i-2}}{2h} x + y_{2i-1} \, dx =$$

$$\left[\frac{y_{2i-2} + y_{2i} - 2y_{2i-1}}{2h^2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{y_{2i} - y_{2i-2}}{2h} \frac{x^2}{2} + y_{2i-1} x \right]_{-h}^{h} =$$

$$\frac{y_{2i-2} + y_{2i} - 2y_{2i-1}}{2h^2} \frac{h^3}{3} + \cancel{\frac{y_{2i} - y_{2i-2}}{2h} \frac{h^2}{2}} + y_{2i-1} h - \left(\frac{y_{2i-2} + y_{2i} - 2y_{2i-1}}{2h^2} \frac{(-h)^3}{3} + \cancel{\frac{y_{2i} - y_{2i-2}}{2h} \frac{(-h)^2}{2}} \right.$$

$$\left. + y_{2i-1}(-h) \right) = (y_{2i-2} + y_{2i} - 2y_{2i-1}) \frac{2h}{6} + 2y_{2i-1} h = \frac{y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}}{3} \cdot h$$

Így $\Delta ter_i \approx \frac{b-a}{6n} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$

tehát $ter = \int_a^b f(x)dx = \Delta ter_1 + \Delta ter_2 + \Delta ter_3 + \ldots + \Delta ter_n =$

$$\frac{b-a}{6n} \left((y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + (y_4 + 4y_5 + y_6) + \ldots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \right) =$$

$$\frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Pl. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ közelítés $2n = 4$ osztóponttal, $b = 2$, $a = 1$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{2-1}{12} (y_0 + 4y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4) = \frac{1}{12} \left(1 + 4 \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{6} + 4 \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right)$$

$= 0,693253$, valójában $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 0,693147$, hiba $= -0,000106$