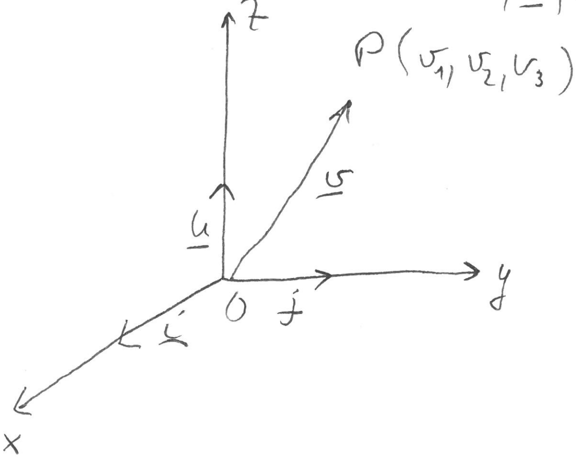
Térgeometria

Vektorok

$$|\underline{i}| = |\underline{j}| = |\underline{k}| = 1$$



$$\overrightarrow{OP} = \underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

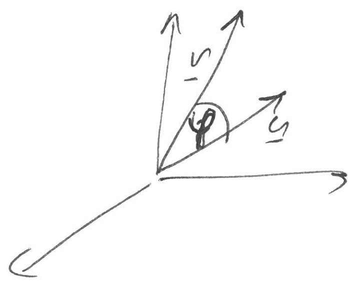
$$|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$P_1(x_1, y_1, z_1),\quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

$\underline{v}$ irányú egységvektor: $\dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$.

Összeadás, kivonás, számmal szorzás:



$$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3),\quad \underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

$$\underline{u} - \underline{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}:\quad \lambda \underline{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$

Feladat: Határozza meg az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által bezárt szöget!

Skaláris szorzat

$0 \le \varphi \le \pi$

Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzata:

$$\underline{u}\,\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}| \cos\varphi$$

Tulajdonságok:

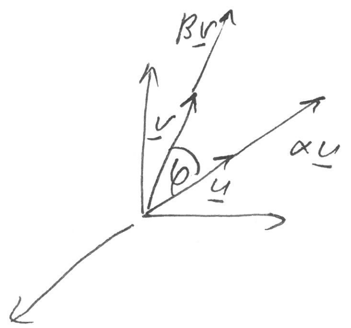
1, $\underline{u}\,\underline{v}=0 \Leftrightarrow |\underline{u}||\underline{v}|\cos\varphi=0 \Leftrightarrow \cos\varphi=0 \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \underline{u}\perp\underline{v}$

2, $\underline{u}\,\underline{v}=\underline{v}\,\underline{u}$ (kommutativitás)

3, $\underline{u}\,\underline{u}=|\underline{u}||\underline{u}|\cos 0=|\underline{u}|^2$

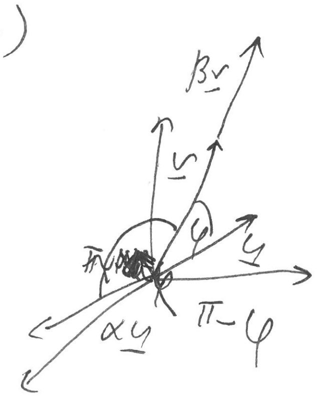
4, $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ (\alpha\underline{u})(\beta\underline{v})=(\alpha\beta)(\underline{u}\,\underline{v})$

Biz Ha $\alpha,\beta>0$:



$$(\alpha\underline{u})(\beta\underline{v})=|\alpha\underline{u}||\beta\underline{v}|\cos\varphi=\alpha\beta|\underline{u}||\underline{v}|\cos\varphi=(\alpha\beta)(\underline{u}\,\underline{v})$$

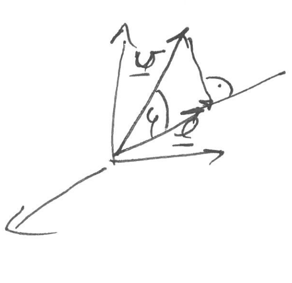
Ha $\alpha<0,\ \beta>0$



$$(\alpha\underline{u})(\beta\underline{v})=|\alpha\underline{u}||\beta\underline{v}|\cos(\pi-\varphi)=$$
$$-\alpha|\underline{u}|\beta|\underline{v}|(-\cos\varphi)=(\alpha\beta)|\underline{u}||\underline{v}|\cos\varphi=$$
$$(\alpha\beta)\,\underline{u}\,\underline{v}$$

:

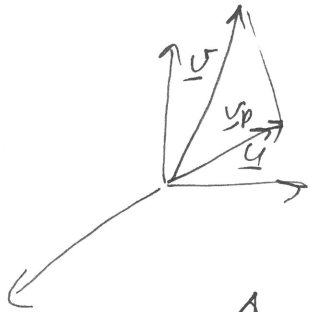
5, Ha $|\underline{e}|=1$, akkor $(\underline{v}\,\underline{e})\underline{e}$ az $\underline{e}$ irányába mutató vetülete $\underline{v}$-nak.



$$|\underline{v}|\cos\varphi\cdot\underline{e}=|\underline{v}||\underline{e}|\cos\varphi\cdot\underline{e}=(\underline{v}\,\underline{e})\underline{e}$$

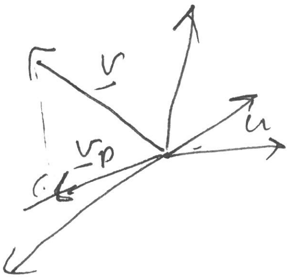
6., A $\underline{v}$ vektor $\underline{u}$ vektorra vett vetülete

$$\underline{v}_p = \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\cdot \underline{u}$$



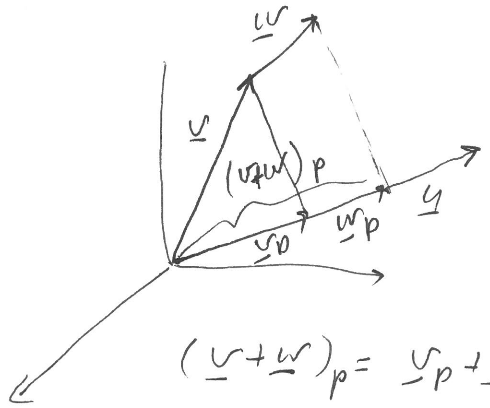
$$\underline{e} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

$$\underline{v}_p = \left(\underline{v}\,\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}\right)\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\cdot \underline{u}$$

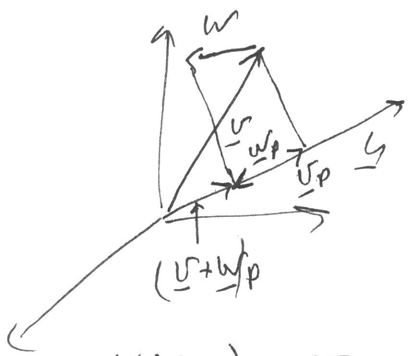


7., Disztributivitás: $\underline{u}(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\,\underline{v}+\underline{u}\,\underline{w}$

Biz



$$(\underline{v}+\underline{w})_p = \underline{v}_p + \underline{w}_p$$



$$(\underline{v}+\underline{w})_p = \underline{v}_p + \underline{w}_p$$

Mindig: $(\underline{v}+\underline{w})_p = \underline{v}_p + \underline{w}_p$

$$\underline{v}_p = \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\,\underline{u}$$

$$\underline{w}_p = \frac{\underline{u}\,\underline{w}}{|\underline{u}|^2}\,\underline{u}$$

$$(\underline{v}+\underline{w})_p = \frac{\underline{u}\,(\underline{v}+\underline{w})}{|\underline{u}|^2}\,\underline{u}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\underline{u} + \frac{\underline{u}\,\underline{w}}{|\underline{u}|^2}\underline{u} = \frac{\underline{u}\,(\underline{v}+\underline{w})}{|\underline{u}|^2}\,\underline{u}$$

$$\Rightarrow (\underline{u}\,\underline{v})\underline{u} + (\underline{u}\,\underline{w})\underline{u} = (\underline{u}(\underline{v}+\underline{w}))\underline{u}$$

$$(\underline{u}\,\underline{v}+\underline{u}\,\underline{w})\underline{u} = \underline{u}(\underline{v}+\underline{w})\cdot\underline{u}$$

Ha $\underline{u} \neq 0 \Rightarrow \underline{u}\,\underline{v}+\underline{u}\,\underline{w} = \underline{u}(\underline{v}+\underline{w})$

A másik oldali disztributivitás is teljesül:

$$(\underline{u}+\underline{v})\underline{w} = \underline{w}(\underline{u}+\underline{v}) = \underline{w}\,\underline{u} + \underline{w}\,\underline{v} = \underline{u}\,\underline{w} + \underline{v}\,\underline{w} = (\underline{u}+\underline{v})\underline{w}$$

8.) Legyen $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, akkor

$$\underline{u} = u_1\underline{i} + u_2\underline{j} + u_3\underline{k}, \quad \underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$$

Ekkor $\underline{u}\,\underline{v} = (u_1\underline{i} + u_2\underline{j} + u_3\underline{k})(v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}) =$

$$(u_1\underline{i})(v_1\underline{i}) + (u_1\underline{i})(v_2\underline{j}) + (u_1\underline{i})(v_3\underline{k}) + (u_2\underline{j})(v_1\underline{i}) + (u_2\underline{j})(v_2\underline{j}) +$$

$$(u_2\underline{j})(v_3\underline{k}) + (u_3\underline{k})(v_1\underline{i}) + (u_3\underline{k})(v_2\underline{j}) + (u_3\underline{k})(v_3\underline{k}) =$$

$$u_1v_1\,\underline{i}\cdot\underline{i} + u_1v_2\,\underline{i}\,\underline{j} + u_1v_3\,\underline{i}\,\underline{k} + u_2v_1\,\underline{j}\,\underline{i} + u_2v_2\,\underline{j}\,\underline{j} + u_2v_3\,\underline{j}\,\underline{k} +$$

$$u_3v_1\,\underline{k}\,\underline{i} + u_3v_2\,\underline{k}\,\underline{j} + u_3v_3\,\underline{k}\,\underline{k} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

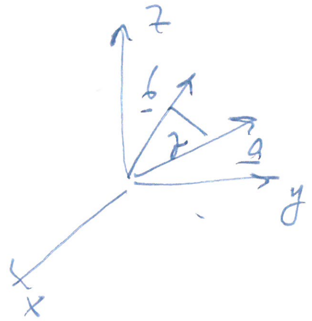
$\underline{i} \perp \underline{j} \Rightarrow \underline{i}\,\underline{j} = \underline{j}\,\underline{i} = 0$ $\qquad$ $\underline{i}\,\underline{i} = (\underline{i})^2 = 1$

$\underline{i} \perp \underline{k} \Rightarrow \underline{i}\,\underline{k} = \underline{k}\,\underline{i} = 0$ $\qquad$ $\underline{j}\,\underline{j} = |\underline{j}|^2 = 1$

$\underline{j} \perp \underline{k} \Rightarrow \underline{j}\,\underline{k} = \underline{k}\,\underline{j} = 0$ $\qquad$ $\underline{k}\,\underline{k} = (\underline{k})^2 = 1$

Tehát $\underline{u}\,\underline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Pl. 1. Határozza meg az $\underline{a} = (3,4,5)$ és $\underline{b} = (2,1,0)$ térvektorok által bezárt szöget!



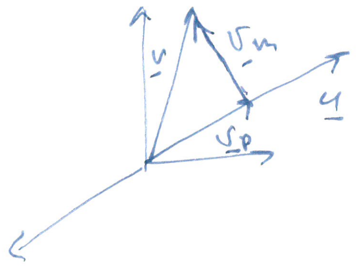
$\underline{a}\,\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\gamma \Rightarrow$

$$\cos\gamma = \frac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \frac{3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 5\cdot 0}{\sqrt{9+16+25}\sqrt{4+1+0}} =$$

$$\frac{10}{\sqrt{250}} = 0{,}632 \Rightarrow \gamma = 50{,}77^\circ$$

2. Bontsuk fel az $\underline{v} = (4, -1, 2)$ vektort az $\underline{u} = (-2, 3, 1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges vektorokra!

$$\underline{v} = \underline{v}_p + \underline{v}_m$$



$$\underline{v}_p = \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2} \cdot \underline{u} = \frac{-8-3+2}{4+9+1}(-2,3,1) =$$

$$-\frac{9}{14}(-2,3,1) = \left(\frac{18}{14}, \frac{-27}{14}, \frac{-9}{14}\right)$$

$$\underline{v}_m = \underline{v} - \underline{v}_p = \left(\frac{38}{14}, \frac{13}{14}, \frac{37}{14}\right)$$

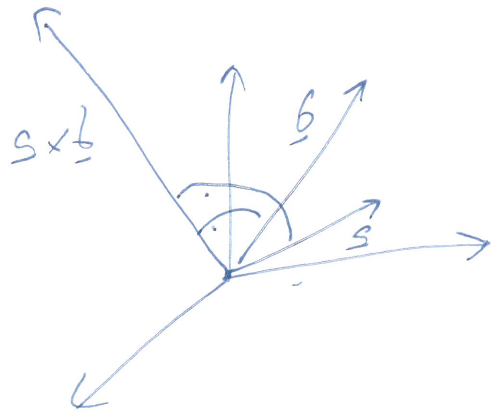
Vektoriális szorzat

Def Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok vektoriális szorzata az $\underline{a} \times \underline{b}$-vel jelölt vektor, amire teljesül, hogy

1, $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \gamma$

2, $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$ és $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$

3, az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ jobbsodrású rendszert alkot, azaz teljesül rá a jobbkézszabály



Tulajdonságok

1, $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \iff |\underline{a}||\underline{b}| \sin\gamma = 0 \iff \sin\gamma = 0 \iff \gamma = 0$
$\iff \underline{a} \parallel \underline{b}$

2, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $(\alpha \underline{a}) \times (\beta \underline{b}) = (\alpha\beta)(\underline{a} \times \underline{b})$

3, $\underline{b} \times \underline{a} = -(\underline{a} \times \underline{b})$

4, $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$
$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$ } disztributivitás

5, $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$
$\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$

$\underline{a} \times \underline{b} = (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) \times (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) =$
$(a_1 \underline{i}) \times (b_1 \underline{i}) + (a_1 \underline{i}) \times (b_2 \underline{j}) + (a_1 \underline{i}) \times (b_3 \underline{k}) +$
$(a_2 \underline{j}) \times (b_1 \underline{i}) + (a_2 \underline{j}) \times (b_2 \underline{j}) + (a_2 \underline{k}) \times (b_3 \underline{k}) +$
$(a_3 \underline{k}) \times (b_1 \underline{i}) + (a_3 \underline{k}) \times (b_2 \underline{j}) + (a_3 \underline{k}) \times (b_3 \underline{k}) =$
$(a_1 b_1)\overbrace{(\underline{i} \times \underline{i})}^{\underline{0}} + (a_1 b_2)\overbrace{(\underline{i} \times \underline{j})}^{\underline{k}} + (a_1 b_3)\overbrace{(\underline{i} \times \underline{k})}^{-\underline{j}} +$
$(a_2 b_1)\overbrace{(\underline{j} \times \underline{i})}^{-\underline{k}} + (a_2 b_2)\overbrace{(\underline{j} \times \underline{j})}^{\underline{0}} + (a_2 b_3)\overbrace{(\underline{j} \times \underline{k})}^{\underline{i}} +$
$(a_3 b_1)\underbrace{(\underline{k} \times \underline{i})}_{\underline{j}} + (a_3 b_2)\underbrace{(\underline{k} \times \underline{j})}_{-\underline{i}} + (a_3 b_3)\underbrace{(\underline{k} \times \underline{k})}_{\underline{0}} =$

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$
$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$
$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$

$(a_2 b_3 - a_3 b_2)\underline{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\underline{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\underline{k}$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{i} & \underline{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$$

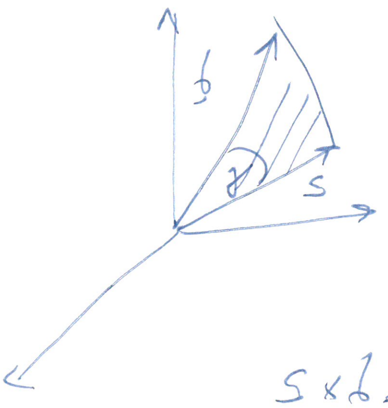
$\setminus$: $+$
$/$: $-$

Sarrus-szabály

Pl. 1. Számítsa ki az $\underline{a}=(3,-1,2)$ és $\underline{b}=(5,4,-1)$ vektorok vektori szorzatát!

$$\underline{a}\times\underline{b}=\left|\begin{matrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 5 & 4 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}\underline{i} & \underline{j}\\ 3 & -1\\ 5 & 4\end{matrix}=\underline{i}\,(1-8)+\underline{j}\,(10-(-3))+\underline{k}\,(12-(-5))=(-7,13,17)$$

2. Határozza meg az $\underline{a}=(-1,2,-3)$ és $\underline{b}=(4,1,2)$ vektorok által meghatározott háromszög területét!



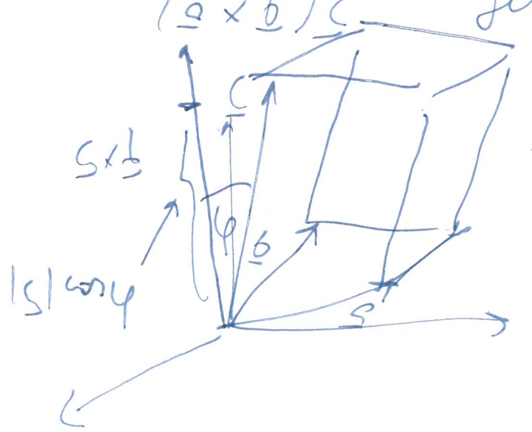
$$ter=\frac{|\underline{a}||\underline{b}|\sin\gamma}{2}=\frac{|\underline{a}\times\underline{b}|}{2}=\frac{\sqrt{49+100+81}}{2}=\frac{\sqrt{230}}{2}$$

$$\underline{a}\times\underline{b}=\left|\begin{matrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ -1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}\underline{i} & \underline{j}\\ -1 & 2\\ 4 & 1\end{matrix}=\underline{i}\,(4-(-3))+\underline{j}\,(-12-(-2))+\underline{k}\,(-1-8)=(7,-10,-9)$$

Vegyes szorzat

Def Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzata:

$(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c}$ Jelölés: $\underline{a}\underline{b}\underline{c}$.



$$\underline{a}\underline{b}\underline{c}=(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c}=|\underline{a}\times\underline{b}||\underline{c}|\cos\varphi$$

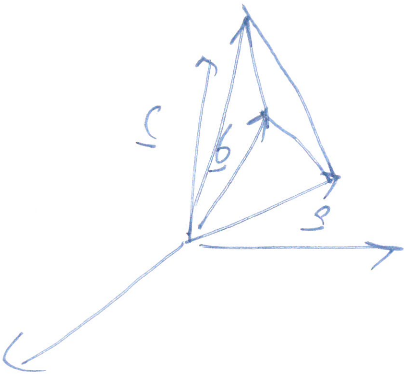
$|\underline{a}\times\underline{b}|$: az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma területe.

$|\underline{c}| \cos \gamma$: Ha $\varphi < \frac{\pi}{2}$, akkor az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon magassága.

Ha $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ akkor a paralelepipedon magasságának (−1) – szerese.

Így $\underline{a}\underline{b}\underline{c}$ az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata.

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata: $|\underline{a}\underline{b}\underline{c}|$.



Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által meghatározott tetraéder térfogata:

$$V_{\text{tetraéder}} = \frac{|\underline{a}\underline{b}\underline{c}|}{6}.$$

Hogyan számítsuk ki az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok vegyesszorzatát?

$$\underline{a}\underline{b}\underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b})\underline{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

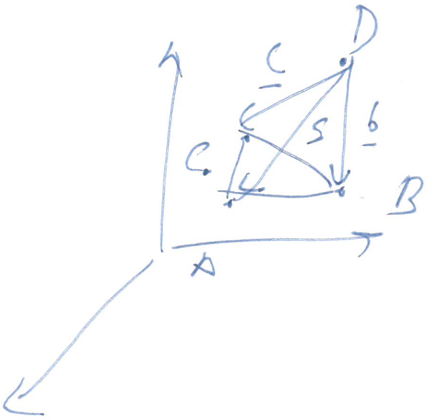
Sarrus-szabály

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}\right.$$

$\setminus$: $\oplus$

$/$: $\ominus$

Pl. Határozza meg az $A(4,-1,2)$, $B(5,3,2)$, $C(4,7,-1)$ és $D(-1,2,3)$ csúcsú tetraéder térfogatát!



$$\underline{a} = \overrightarrow{DA} = (-5, 3, 1)$$

$$\underline{b} = \overrightarrow{DB} = (-6, -1, 1)$$

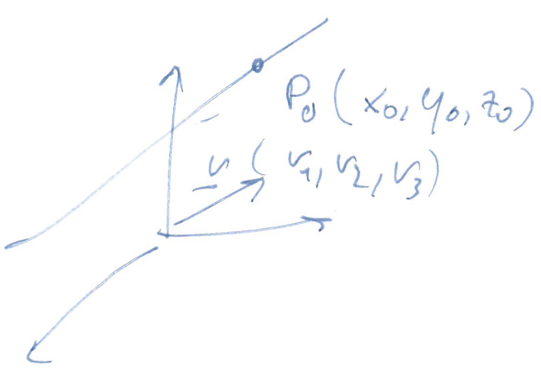
$$\underline{c} = \overrightarrow{DC} = (5, -5, 4)$$

$$V_{ABCD\ \text{tetr}} = \frac{|\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}|}{6} = \frac{57}{6} = 9{,}5$$

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \left|\begin{array}{ccc|cc} -5 & 3 & 1 & -5 & 3 \\ -6 & -1 & 1 & -6 & -1 \\ 5 & -5 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right. = 20+15+(-30)-(-5)-25-(-72)=57$$

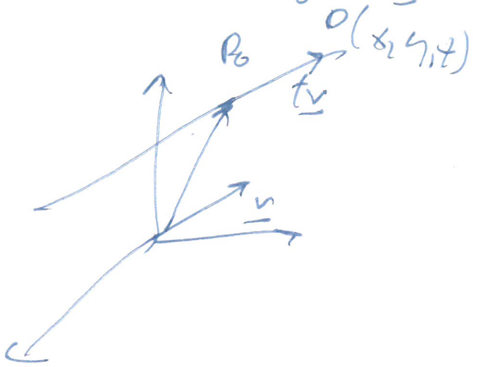
Egyenesek és síkok térben

Egyenes



Egy térbeli egyenest annak egy pontja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ és egy vele párhuzamos vektor: irányvektor $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

határoz meg. Ekkor az egyenes általános pontjának vektor: $\overrightarrow{OP_0} + t\underline{v}$

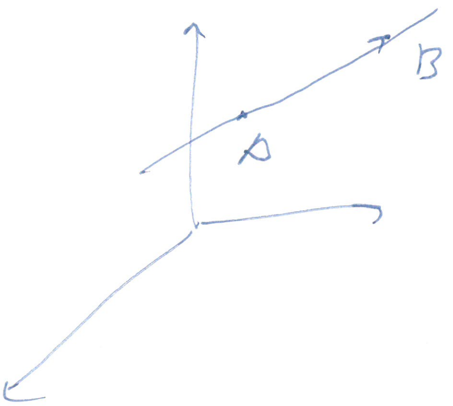


$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) =$$
$$(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 \end{aligned}\right\}$$ az egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$t = \boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}}$$ az egyenes egyenletrendszere

Pl. 1. Határozza meg az $A(2,4,-1)$ és $B(5,3,2)$ pontokon átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét!



$$P_0 = A = (2,4,-1)$$
$$\underline{v} = \overrightarrow{AB} = (3,-1,3)$$

$$x = 2 + 3t$$
$$y = 4 - t$$
$$z = -1 + 3t$$

2. Adott három egyenes paraméteres egyenletrendszere:

e_1: $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -1 + 2t$

e_2: $x = 4 - 2t$, $y = -1 + 4t$, $z = -4t$

e_3: $x = 4 + t$, $y = 5 + 4t$, $z = 3 + 2t$

Határozza meg a három egyenes egymáshoz viszonyított helyzetét (párhuzamos, metsző vagy kitérő)!

$\underline{v}_1 = (1,-2,2)$, $\underline{v}_2 = (-2,4,-4)$, $\underline{v}_3 = (1,4,2)$

$\underline{v}_1 \parallel \underline{v}_2 \Rightarrow e_1$ párhuzamos e_2-vel

e_1, e_3 nem párhuzamos. Metszők-e? Ha igen, akkor léteznek t_1, t_2 paraméterértékek úgy, hogy

$x = 2+t_1 = 4+t_2 \Rightarrow t_1 = 2+t_2$

$y = 3-2t_1 = 5+4t_2 \Rightarrow 3-2(2+t_2) = 5+4t_2 \Rightarrow -1-2t_2 = 5+4t_2$

$-6 = 6t_2$

$z = -1+2t_1 = 3+2t_2$

$t_2 = -1 \Rightarrow t_1 = 1$

Ez a z egyenletet kielégíti-e? $-1+2\cdot 1 = 3+2(-1)$ ✓ $\Rightarrow$ metszők, metszéspont: $M(3,1,1)$

e_2, e_3 nem párhuzamos. Metszők-e?

$x = 4-2t_1 = 4+t_2 \Rightarrow -2t_1 = t_2$

$y = -1+4t_1 = 5+4t_2 \Rightarrow -1+4t_1 = 5+4(-2t_1) = 5-8t_1 \Rightarrow$

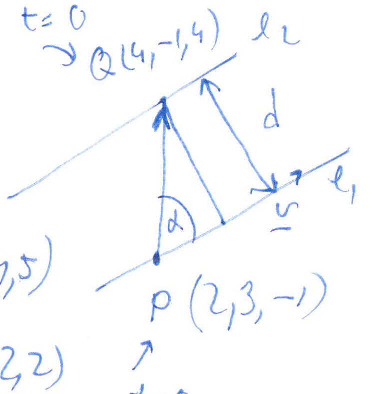
$z = -4t_1 = 3+2t_2$

$6 = 12t_1 \Rightarrow t_1 = 0{,}5,\ t_2 = -1$

$z: -4\cdot 0{,}5 \overset{?}{=} 3+2(-1)$ NEM $\Rightarrow$ kitérők

3. Határozza meg az a) e_1, e_2
b) e_2, e_3
egyenesek távolságát!

a)



$\overrightarrow{PQ}(2,-4,5)$

$\underline{v} = (1,-2,2)$

$d = ?$

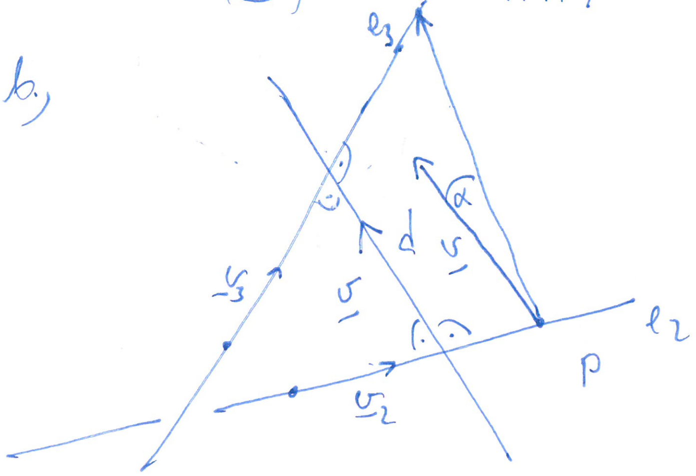
$d = |\overrightarrow{PQ}| \sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{PQ}\times\underline{v}|}{|\underline{v}|}$

$|\overrightarrow{PQ}\times\underline{v}| = |\overrightarrow{PQ}||\underline{v}|\cos\alpha$

$\overrightarrow{PQ}\times\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{i} & \underline{j} \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{matrix} = \underline{i}(-8-10) + \underline{j}(5-4) + \underline{k}(-4-(-4)) = (-18,1,0)$

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \underline{v}|}{|\underline{v}|} = \frac{\sqrt{324+1}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\sqrt{325}}{3}$$

b.)



Azt az egyenest, amelyik e_2 és e_3 egyeneseket merőlegesen metszi, az e_2 és e_3 egyenesek normáltranszverzálisának hívjuk.

Legyen $P \in e_2$ és $Q \in e_3$. Ekkor a d távolságot a $\overrightarrow{PQ}$ normáltranszverzálisra vett vetületét kapjuk meg

$\alpha > \pi/2$ is lehet

$$d = \left| |\overrightarrow{PQ}| \cos\alpha \right| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \underline{v}|}{|\underline{v}|} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\underline{v}_2 \times \underline{v}_3)|}{|\underline{v}_2 \times \underline{v}_3|}$$

$$\overrightarrow{PQ}\,\underline{v} = |\overrightarrow{PQ}||\underline{v}| \cos\alpha$$

$$\underline{v} = \underline{v}_2 \times \underline{v}_3$$

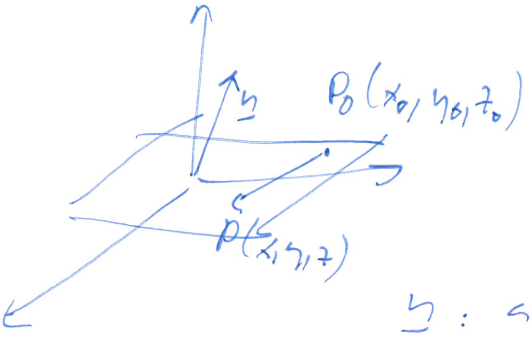
$$\underline{v}_2 \times \underline{v}_3 = \left| \begin{array}{ccc|cc} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} & \underline{i} & \underline{j} \\ -2 & 4 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right| = \underline{i}\,(8-(-16)) + \underline{j}\,(-4-(-4)) + \underline{k}\,(-8-4) = (24, 0, -12)$$

$P:\ t = 0:\ P(4, -1, 4)$
$Q:\ t = 0:\ Q(4, 5, 3)$
$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (0, 6, -1)$

$$d = \frac{0 \cdot 24 + 6 \cdot 0 + (-1)(-12)}{\sqrt{24^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{12}{\sqrt{720}}$$

Síkok

$\underline{n}(n_1, n_2, n_3)$



Egy síkot úgy adunk meg, hogy megmondjuk egy pontját és egy rá merőleges $\underline{n}$ vektort.

$\underline{n}$: a sík normálisa

A $P(x,y,z)$ pont pontosan akkor van rajta a síkon, ha $\overrightarrow{P_0P} \perp \underline{n}$, azaz $\overrightarrow{P_0P}\,\underline{n} = 0$.

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$$0 = \overrightarrow{PP_0}\,\underline{n} = n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$$

A sík egyenlete:

$$\boxed{n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0}$$

Pl. 1. Határozza meg a $P_0(3,-1,2)$ ponton átmenő az $x+2y+3z=7$ síkkal párhuzamos síkot!

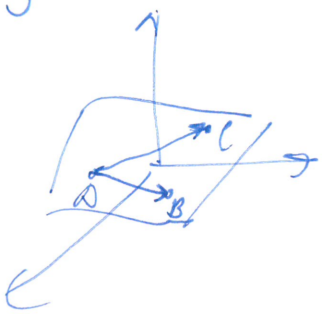
Megoldás: Ha a két sík párhuzamos $\Rightarrow$ normálvektoraik párhuzamosak: $\underline{n} = (1,2,3)$

Sík egyenlete: $1(x-3) + 2(y-(-1)) + 3(z-2) = 0$

$$x + 2y + 3z = 7$$

2, Határozza meg az $A(2,3,-1)$, $B(4,5,2)$ és $C(0,3,2)$ pontokon átmenő sík egyenletét!

Megoldás:



$$n = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{matrix} =$$

$\vec{AB} = (2,2,3)$

$\vec{AC} = (-2,0,3)$

$$i(6-0) + j(-6-6) + k(0-(-4)) =$$

$$(6,-12,4)$$

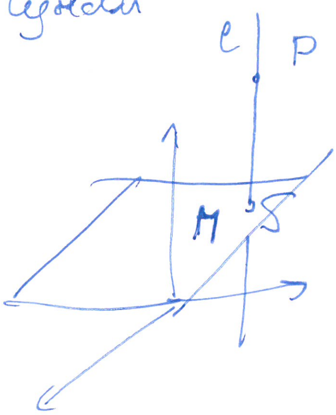
$P_0 = A = (2,3,-1)$

Sík: $6(x-2) + (-12)(y-3) + 4(z-(-1)) = 0$

$$6x - 12y + 4z = -28$$

3. Határozza meg a $P(3,2,-1)$ pont és a $2x-3y+z=5$ sík távolságát!

1. Megoldás



P ponton át az S síkra merőleges egyenest fektetünk, ennek az S síkkal való metszete: M.

$d = |\vec{PM}|$.

Az e egyenes irányvektora: $v = (2,-3,1)$

e paraméteres egyenletrendszere: $x = 3+2t$

$y = 2-3t$

$z = -1+t$

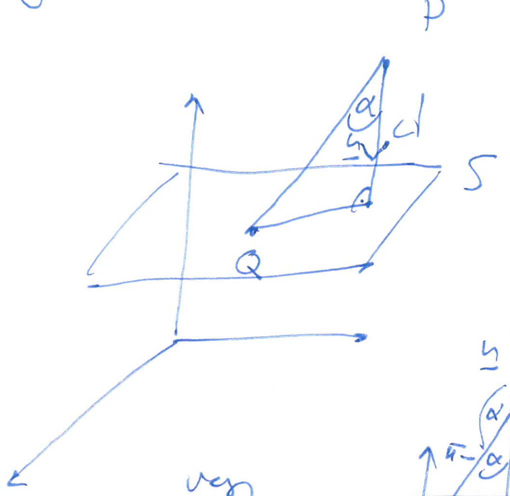
M: $2x-3y+z=5$

$2(3+2t) - 3(2-3t) + (-1+t) = 5$

$6 = 14t \Rightarrow t = 6/14 \Rightarrow M\left(\frac{27}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{4}{7}\right)$

$\vec{PM} = \left(\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{7}\right) \Rightarrow d = |\vec{PM}| = \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{81}{49} + \frac{9}{49}} = \sqrt{\frac{126}{49}}$

2. Megoldás



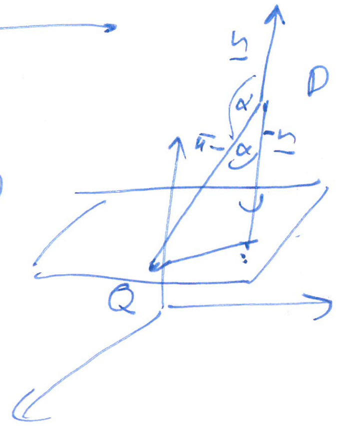
ha $0<\alpha<\pi/2$

$Q \in S$

$d = |\overrightarrow{PQ}| \cos\alpha$

$\overrightarrow{PQ}\,\underline{n} = |\overrightarrow{PQ}|\,|\underline{n}| \cos\alpha$

vagy



$d = |\overrightarrow{PQ}| \cos(\pi-\alpha) = |\overrightarrow{PQ}|(-\cos\alpha)$

ha $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

$$\Rightarrow \quad d = |\overrightarrow{PQ}|\,|\cos\alpha| = \frac{|\overrightarrow{PQ}\,\underline{n}|}{|\underline{n}|}$$

Q: $t=0$: $x=0,\ y=0 \Rightarrow z=5$ $\quad Q(0,0,5)$

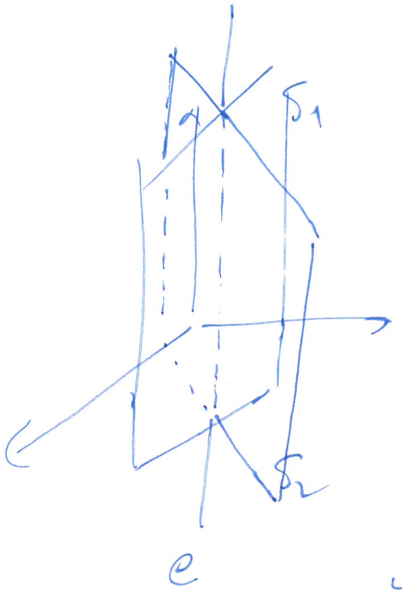
$\overrightarrow{PQ} = (-3,-2,6)$, $\underline{n}\ (2,-3,1)$

$\overrightarrow{PQ}\,\underline{n} = -3\cdot 2 + (-2)(-3) + 6\cdot 1 = 6$

$$d = \frac{|6|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

4. Határozza meg az S_1: $2x+3y+4z=5$ és S_2: $x-y+2z=4$ síkok metszetét.

Megoldás: Az S_1 és S_2 síkok nem párhuzamosak ($\underline{n}_1=(2,3,4)$, $\underline{n}_2=(1,-1,2)$ vektorok nem párhuzamosak), emiatt a metszetük egy egyenes.



$$\left.\begin{array}{l} e \in S_1 \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{n}_1 \\ e \in S_2 \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{n}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underline{n}_1 \times \underline{n}_2$$

az e egyenes irányvektora

$\underline{n}_1 = (2,3,4)$

$\underline{n}_2 = (1,-1,2)$

$$\underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{i} & \underline{j} \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$\underline{i}\,(6-(-4)) + \underline{j}\,(4-4) + \underline{k}\,(-2-3) =$$

$$(10, 0, -5)$$

Az e egyenes egy pontja $P(x,y,z)$, tehát $P \in S_1$, $P \in S_2$:

$2x+3y+4z=5$

$x-y+2z=4$

Ha $x=0$: $3y+4z=5$

$-y+2z=4 \Rightarrow y=2z-4$

$3(2z-4)+4z=5$

$10z=17 \Rightarrow z=1{,}7$

$P(0, 0; 1{,}7)$

e: $x = 0+10t = 10t$

$y = 0+0\cdot t = 0$

$z = 1{,}7-5t$