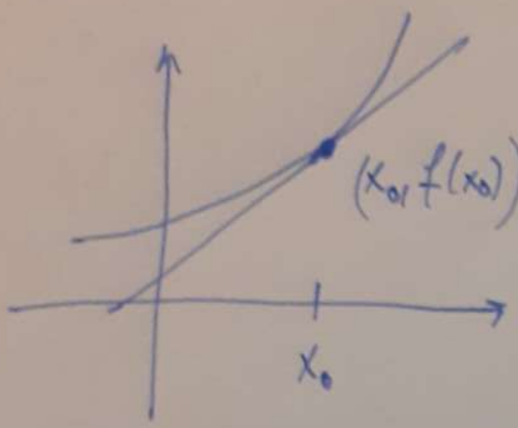
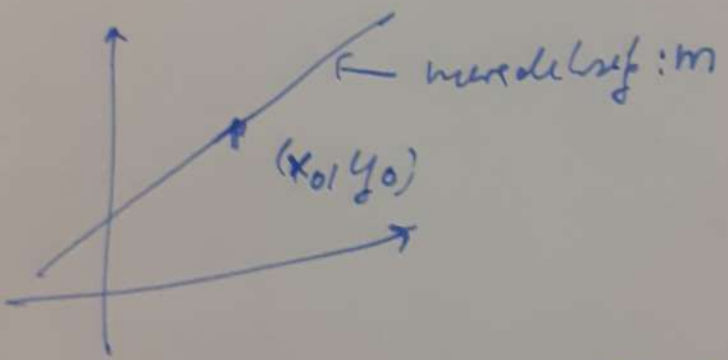
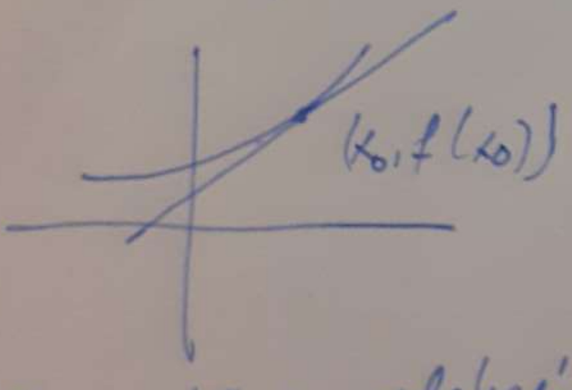
DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

Feladat: Határozza meg az $f(x)$ fv $(x_0, f(x_0))$-ban vett érintőjét!



Az (x_0, y_0) ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete: $y - y_0 = m(x - x_0)$

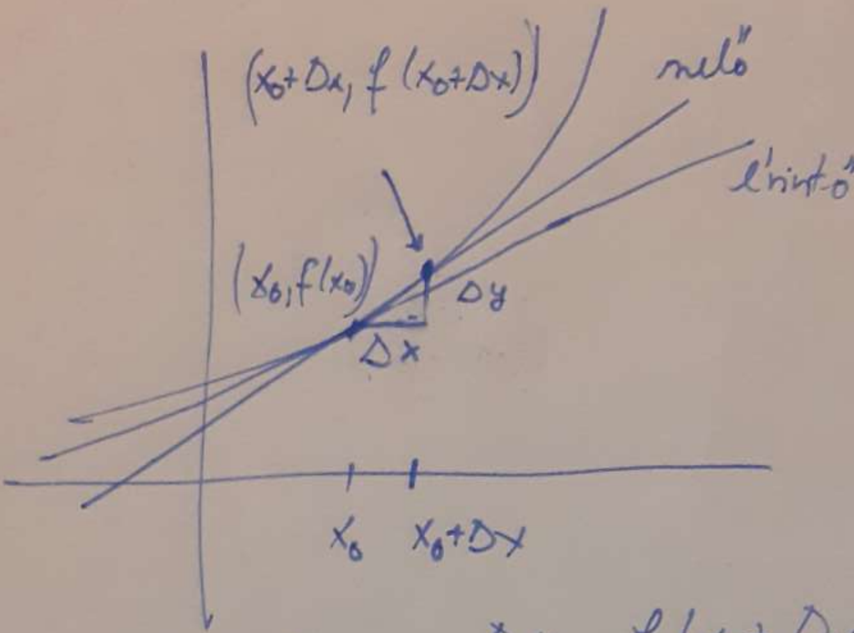




$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

Hogyan határozhatjuk meg m-et?

Az érintő meredekségét közelítsük a szelő meredekségével:



metsző meredeksége: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \approx m$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Def Ha az $f(x)$-nek az x_0-ban létezik a

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ határértéke, akkor az

$f(x)$ fvt az x_0-ban differenciálhatónak vagy

deriválhatónak mondjuk.

Jelölés: $f'(x_0)$

Tehát $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Ha $x = x_0+\Delta x$, akkor $\Delta x \to 0$ az $x \to x_0$-val

felel meg, mint $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Pl. $f(x)=x^2$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 2x_0+\Delta x=2x_0$$

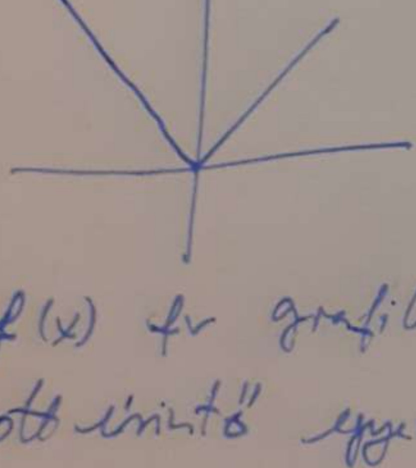
<u>Def</u> Ha az $f(x)$ fv az értelmezési tartomány minden pontjában differenciálható, akkor az $f(x)$ fv differenciálható vagy deriválható fv.

Jelölés: $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$

Pl. $f(x)=x^2$ esetén $f'(x)=2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

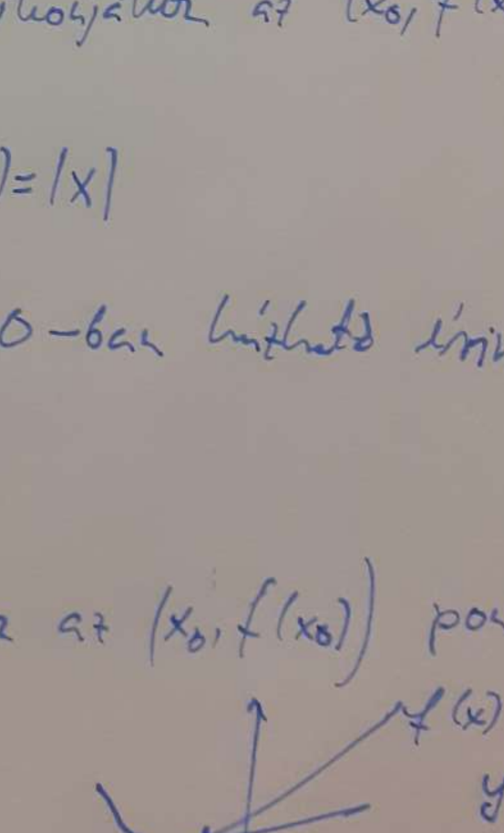
<u>Megj</u> Az, hogy $f(x)$ az x_0-ban, az pontosan azt jelenti, hogy az $f(x)$ grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzható érintő.

Pl. Hol deriválható az $f(x)=|x|$



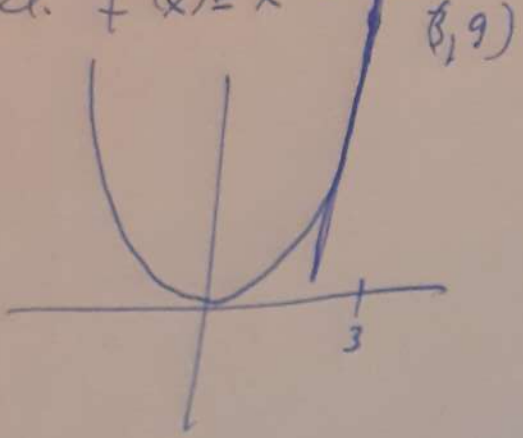
$x\neq 0$-ban húzható érintő

Az $f(x)$ fv grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő egyenlete:



$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Pl. $f(x)=x^2$-hez húzzunk érintőt az $x_0=3$-ben! ⑤



$$f'(x_0)=2x_0 \qquad f(x_0)=f(3)=3^2=9$$

$$f'(3)=2\cdot 3=6$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-9=6(x-3)$$

$$y=6x-9$$

Tétel Ha $f(x)$ differenciálható az x_0-ban, akkor ott folytonos is.

Biz Ha $x \approx x_0$, akkor $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0)$, azaz

$f(x)-f(x_0) \approx f'(x_0)(x-x_0)$. Tehát $f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Ha $x \to x_0$, akkor kapjuk, hogy $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nevezetes fvek deriváltjai

	$f(x)$	$f'(x)$
1.	x^μ	$\mu x^{\mu-1}$
2.	a^x	$a^x \cdot \ln a$
3.	e^x	$e^x \cdot \ln e = e^x$
4.	$\ln x$	$1/x$
5.	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$

$f(x)$	$f'(x)$
6. $\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
7. $\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
8. $\sin x$	$\cos x$
9. $\cos x$	$-\sin x$
10. $\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$	
11. $\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	
12. $\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	
13. $\operatorname{arctg} x$	$1/1+x^2$	
14. $\operatorname{arsh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	
15. $\operatorname{arch} x$	$1/\sqrt{x^2-1}$	$x>1$
16. $\operatorname{arth} x$	$1/1-x^2$	$-1<x<1$

1. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^\mu\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^\mu\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{z \to 0} x^{\mu-1} \cdot \frac{(1+z)^\mu - 1}{z} = \mu x^{\mu-1}$$

Legyen $z = \frac{\Delta x}{x}$. Ha $\Delta x \to 0$, akkor $z \to 0$

Volt: $\lim_{z \to 0} \frac{(1+z)^\mu - 1}{z} = \mu$

6

2. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x a^{\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} a^x\cdot\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0} a^x\,\dfrac{e^{\Delta x\cdot\ln a}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} a^x\cdot\ln a\cdot\dfrac{e^{\Delta x\cdot\ln a}-1}{\Delta x\cdot\ln a}=$

$a^{\Delta x}=(e^{\ln a})^{\Delta x}=e^{\Delta x\ln a}$, legyen $z=\Delta x\cdot\ln a$, ha $\Delta x\to 0$, akkor $z\to 0$

Volt: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=1$

$=\lim\limits_{z\to 0} a^x\cdot\ln a\cdot\dfrac{e^z-1}{z}=a^x\cdot\ln a$

3. Volt: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=1$

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{x}\,\dfrac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\dfrac{1}{x}$

Legyen $z=\dfrac{\Delta x}{x}$. Ha $\Delta x\to 0$, akkor $z\to 0$

Műveletek függvényekkel és differenciálhatóság

1, Legyen $c\in\mathbb{R}$. Tfh $f(x)$ differenciálható x_0-ban. Akkor $cf(x)$ is differenciálható x_0-ban és $(cf(x_0))'=c\cdot f'(x_0)$

Biz:

$(cf(x_0))'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{cf(x_0+\Delta x)-cf(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} c\cdot\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$

$c\cdot f'(x_0)$.

(7.)

2. Tfh $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható x_0-ban. Ekkor $f(x) \pm g(x)$ is differenciálható x_0-ban és $(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

A + -t bizonyítjuk:

$$(f(x_0)+g(x_0))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-(f(x_0)+g(x_0))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right) = f'(x_0)+g'(x_0).$$

3. Ha $f(x)$ és $g(x)$ is differenciálható x_0-ban, akkor $f(x)g(x)$ is differenciálható és $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Biz: $$(f(x_0)g(x_0))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)+f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x)(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))+f(x_0)(g(x_0+\Delta x)-g(x_0))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{g(x_0+\Delta x)}_{\downarrow \text{ folyt } g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{\downarrow\, f'(x_0)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}}_{\downarrow\, g'(x_0)} =$$

$$f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

4. Ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható x_0-ban és $g'(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f(x)}{g(x)}$ is differenciálható x_0-ban és

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(Nem biz)

(8.)

5. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) =$

$\frac{1}{2}\left(e^x - (-e^{-x})\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$

$(e^{-x})' = \left(\left(\frac{1}{e}\right)^x\right)' = \left(\frac{1}{e}\right)^x \cdot \ln\frac{1}{e} = -\left(\frac{1}{e}\right)^x = -e^{-x}$

6. Hasonlóan: $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

7. $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$

$= \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

8. $(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \overbrace{(x + \Delta x)}^{\alpha} - \sin \overset{\beta}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x}$

$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\cos\Big(x + \overset{\to 0}{\frac{\Delta x}{2}}\Big)}_{\to \cos x} \cdot \overset{\to 1}{\left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)} = \cos x$

volt: $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1, \quad z = \frac{\Delta x}{2}$

9. Hasonlóan megmutatható: $(\cos x)' = -\sin x$

10. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$\frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Összetett fv: $y = f(g(x))$ — f: külső fv, g: belső fv

Pl. $y = (\sin x)^3$ — $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$

$y = e^{x^4}$ — $f(x) = e^x$, $g(x) = x^4$

$y = \cos(4x - \pi)$ — $f(x) = \cos x$, $g(x) = 4x - \pi$

$y = \ln(6x^2 + 5x)$ — $f(x) = \ln x$, $g(x) = 6x^2 + 5x$

Láncszabály (összetett fv deriválási szabálya).

Tfh $f(x)$ deriválható $g(x_0)$-ban és $g(x)$ deriválható x_0-ban. Ekkor $y = f(g(x))$ is differenciálható x_0-ban és $(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Biz

$$(f(g(x_0)))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0+\Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} =$$

Legyen $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = \Delta g$. Ha $\Delta x \to 0$, akkor $\Delta g \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0) + \Delta g) - f(g(x_0))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta g \to 0)}} \underbrace{\frac{f(g(x_0) + \Delta g) - f(g(x_0))}{\Delta g}}_{\downarrow \\ f'(g(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}}_{\downarrow \\ g'(x_0)} =$$

$$f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Pl. $y = 10^{x^2}$: $f(x) = 10^x$, $f'(x) = 10^x \cdot \ln 10$

$g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$

$y' = 10^{x^2} \cdot \ln 10 \cdot 2x$

$y = \ln(x^2+5x)$ $\quad f(x) = \ln x \quad f'(x) = 1/x$

$\quad g(x) = x^2+5x, \; g'(x) = 2x+5$

$y' = \dfrac{1}{x^2+5x} \cdot (2x+5)$

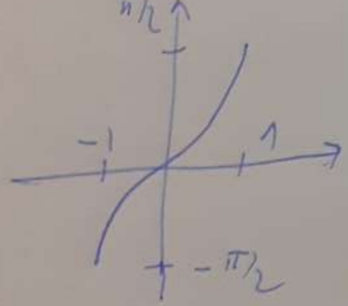
Alkalmazás: Tudjuk $x = f(f^{-1}(x)) \quad /()'$

$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))'$

$\Rightarrow (f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

11. $f^{-1}(x) = \arcsin x \Rightarrow f(x) = \sin x, \; f'(x) = \cos x$

$(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$

$\sin(\arcsin x) = x$ ha $-1 \le x \le 1$

$0 \le \cos(\arcsin x) = \sqrt{\cos^2(\arcsin x)} =$ $\quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$

ha $-\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos z \ge 0$

$\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$

Pl $\quad y = 3x^2+5x+7 \Rightarrow y' = 6x+5$

$y = (x^2+3)\,\mathrm{arctg}\,x \Rightarrow y' = 2x \cdot \mathrm{arctg}\,x + (x^2+3) \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

$y = \dfrac{\ln x}{10^x} \Rightarrow y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot 10^x - \ln x \cdot 10^x \cdot \ln 10}{(10^x)^2}$

$y = \ln(x^2+1) = f(g(x))$ $\qquad f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g(x) = x^2+1, \quad g'(x) = 2x$

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$y = 10^{\sqrt{x}} \cdot \sin 2x \Rightarrow y' = \left(10^{\sqrt{x}}\right)' \cdot \sin 2x + 10^{\sqrt{x}} \cdot (\sin 2x)'$$

$$= 10^{\sqrt{x}} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot \sin 2x + 10^{\sqrt{x}} \cdot \cos 2x \cdot 2$$

Pl. Határozza meg azon x_0 pontokat, melyekben az $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ fv érintője vízszintes!

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1$$

Középérték tételek

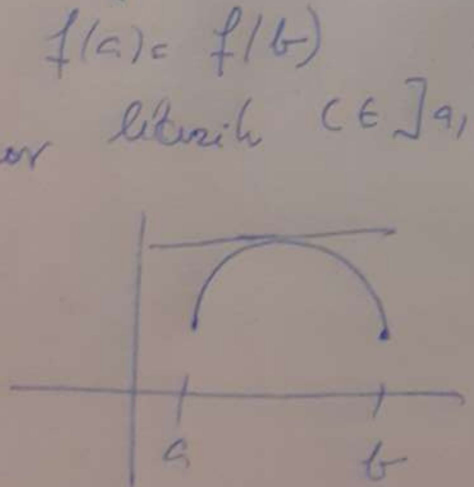
Rolle-tétel: Legyen $f(x)$ olyan fv, ami

a, folytonos $[a,b]$-ben

b, differenciálható $]a,b[$-ben

c, $f(a) = f(b)$

Ekkor létezik $c \in]a,b[$, hogy $f'(c) = 0$.



Azaz létezik $c \in]a,b[$, hogy ott vízszintes az érintő.

<u>Biz</u> Tudjuk, hogy zárt intervallumon folytonos fvnek van legnagyobb és legkisebb értéke ott: M és m.

Lehetőségek: 1, $M=m \Rightarrow f(x) = \text{konstans} \Rightarrow f'(c) = 0$

minden $c \in]a,b[$

2, $M>m \Rightarrow$ létezik $c \in]a,b[$, hogy $f(x)$-nek c-ben minimuma vagy maximuma van.

Tfh c-ben maximuma van (a minimum hasonlóan kezelhető)

Áll: $f'(c)=0$

$$\left.\begin{aligned} f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\overbrace{f(c+\Delta x)-f(c)}^{\le 0}}{\underset{\sim}{\Delta x}} \le 0 \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\overbrace{f(c+\Delta x)-f(c)}^{\le 0}}{\underset{\substack{\sim \\ <0}}{\Delta x}}}_{\ge 0} \ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(c)=0$$

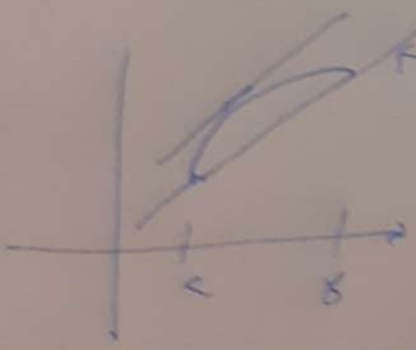
Ennek általánosítása:

<u>Lagrange-tétel</u> Tfh az $f(x)$ fvre teljesül, hogy

a, folytonos $[a,b]$-ben

b, deriválható $]a,b[$-ben.

Ekkor létezik $c \in]a,b[$, hogy $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$\leftarrow$ meredekség $= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

létezik a metsővel $\parallel$ érintő

Megj: Ha $f(b)=f(a)$, akkor a Rolle-tételt kapjuk.

Biz: Legyen $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Ekkor

1, $g(x)$ folytonos $[a,b]$-ben

2, $g(x)$ deriválható $]a,b[$-ben

3, $g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(b)-(f(b)-f(a))=f(a)$

$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)$

$\Rightarrow g(b)=g(a)$.

Így $g(x)$-re alkalmazhatjuk a Rolle-tételt:

létezik $c\in]a,b[$, hogy $g'(c)=0$

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 1$$

$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

L'Hospital-szabály

A $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték kiszámításánál a $\frac{0}{0}$ vagy a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$-re vezetők a problémásak.

L'Hospital-szabály első alakja: Tfh $f(x)$ és $g(x)$ folytonos $x=a$-ban, $f(a)=g(a)=0$. Ha $f'(a)$ és $g'(a)$ létezik és $g'(a)\neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Biz: $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Pl. 1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln 1}{1-1} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \frac{\frac{1}{1}}{1} = 1$ $\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(x-1)' = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{\sin 0}{3\cdot 0} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \frac{2\cdot\cos(2\cdot 0)}{3} = \frac{2}{3}$

L'Hospital-szabály erősebb alakja: Legyen $f(a)=0$, $g(a)=0$, valamint $f(x)$ és $g(x)$ egyaránt differenciálható valamely a-t tartalmazó I nyílt intervallumban kivéve esetleg a-t, továbbá $g'(x)\neq 0$, ha $x\in I$, $x\neq a$. Ekkor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték létezik.

L'Hospital-szabály alkalmazása: A $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{0}{0}"$ v. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ határértéket úgy kapjuk meg, hogy $f(x)$-et és $g(x)$-et újra és újra deriváljuk, amíg nem $\frac{0}{0}$ v. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ határértéket kapunk. Az a lehet $\pm\infty$ is.

Pl. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2+x^3} = \frac{e^0-1-0}{0^2+0^3} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x+3x^2} = \frac{e^0-1}{2\cdot 0+3\cdot 0^2} = \frac{0}{0}$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{2+6x} = \frac{e^0}{2+6\cdot 0} = \frac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \frac{1-1-\ln 1}{(1-1)\ln 1} = \frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \frac{1-1}{\ln 1 + (1-1)\frac{1}{1}} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{1/x^2}{1/x + \frac{1}{x} + (x-1)(-1/x^2)} = \frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$

$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

4. $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$

$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$

Függvényvizsgálat

Cél: Az $f(x)$ fv alakjának grafikonjának elkészítése.

Def Ha az $f(x)$ fv deriváltja, az $f'(x)$ újra deriválható, akkor azt az $f(x)$ fv második deriváltjának hívjuk:

$f''(x) = (f'(x))'$.

Harmadik derivált: $f'''(x) = (f''(x))'$

Negyedik derivált: $f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$

Pl. $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

$\vdots$

$f^{(2024)}(x) = \sin x$

Monotonitás

Def Az $f(x)$ fv monoton nő (csökken) az I intervallumon, ha $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ esetén $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

Tétel Ha $f(x)$ deriválható az I intervallumon és $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$, akkor monoton nő ott.

Biz Legyen $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$. Ekkor alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel az $f(x)$ fv-re, mert $f(x)$

1., deriválható $[x_1, x_2]$-ben és így

2., folytonos $(x_1, x_2]$-ben

Tehát létezik egy $x_1 < c < x_2$, hogy $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Mivel $f'(c) \geq 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, azaz $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Pl. Hol monoton nő / csökken az $f(x) = x^3 - 3x$ fv?

Megoldás: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

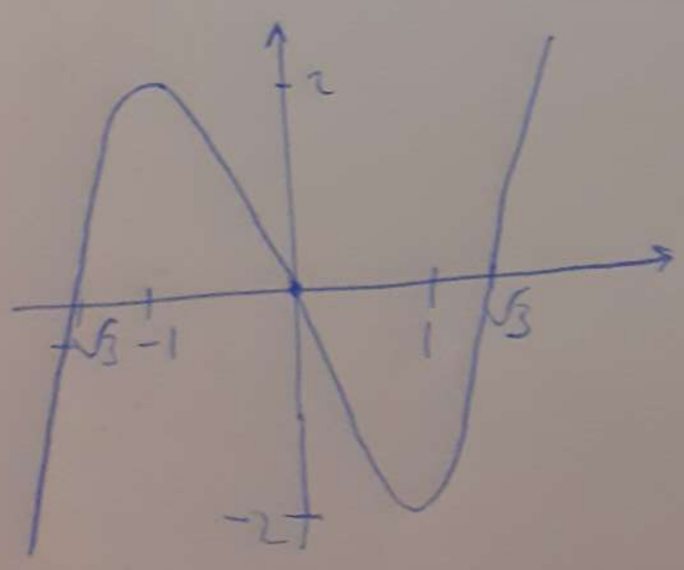
	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	nő		csökken		nő

gyökök:

$x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3}$



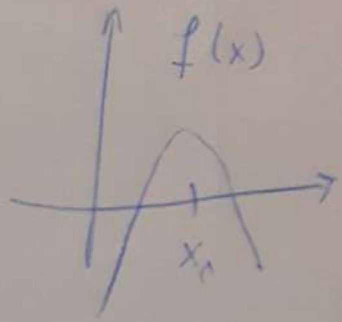
(7.)

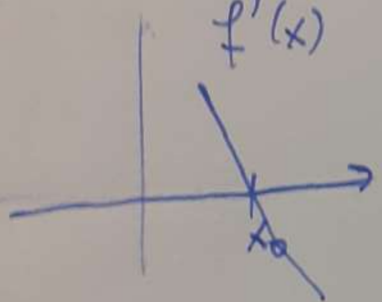
<u>Def</u> Az $f(x)$ függvénynek az x_0-ban lokális maximuma (minimuma) van, ha létezik egy x_0-t tartalmazó I nyílt intervallum, hogy minden $x \in I$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.

Hogyan dönthető el, hogy $f(x)$-nek x_0-ban lok. max-a van?

Ekkor

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f(x)$	nő	lok. max	csökken
$f'(x)$	+		−





$f'(x)$ $x = x_0$-ban monoton csökken, ha $f''(x_0)$.

<u>Tétel</u> Az $f(x)$ függvénynek az x_0-ban lokális maximuma (minimuma) van ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$.

<u>Megj.</u> Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0)$, akkor lehet, hogy $f(x)$-nek x_0-ban lokális maximuma vagy minimuma van, de az is lehet, hogy nincs szélsőértéke

Pl. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 6x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

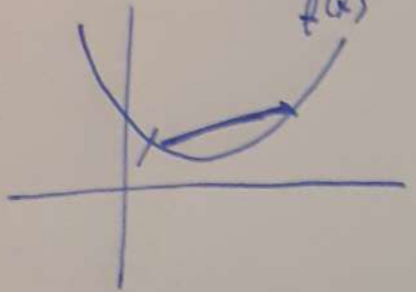
$f''(x) = 12x - 6$ $\qquad f'(0) = 0,\ f'(1) = 0$

$f''(0) = 12 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow x_1 = 0$-ban lok. max. van.

$f''(1) = 12 \cdot 1 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow x_2 = 1$-ben lok. min. van

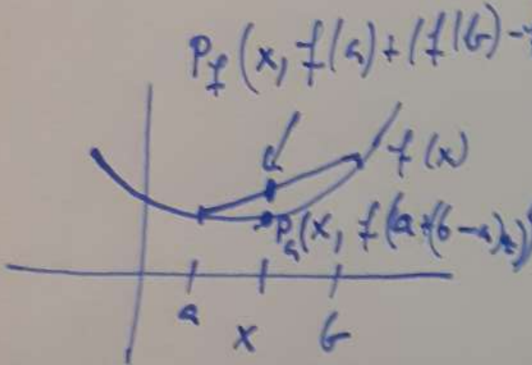
Konvexitás

<u>Def</u> Az $f(x)$ fv az I intervallumon konvex (konkáv), ha bármely I-ben lévő szelő a görbe felett (alatt) van.



konvex

Feladat: Döntsük el, hogy hol konvex az $f(x)$ fv grafikonja!



szelő meredeksége: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

szelő egyenesének egyenlete:

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$x = a+(b-a)z, \quad 0 \le z \le 1$$

Az egyenes $x = a+(b-a)z$ abszcisszájú pontjának második koordinátája:

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a+(b-a)z-a) =$$

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)z = f(a)+(f(b)-f(a))z$$

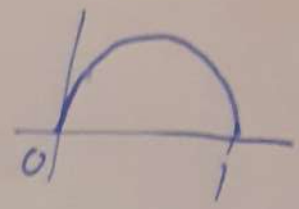
Legyen $h(z)$ a P_f és P_a pontok második koordinátájának különbsége:

$$h(z) = f(a)+(f(b)-f(a))z - f(a+(b-a)z) \ge 0$$

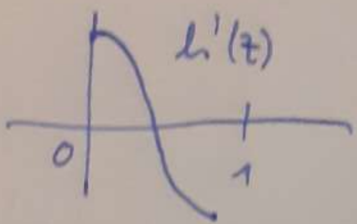
$$h(0) = f(a)+(f(b)-f(a))0 - f(a+(b-a)0) = f(a)-f(a) = 0$$

$$h(1) = f(a)+(f(b)-f(a))\cdot 1 - f(\underbrace{a+(b-a)1}_{b}) = f(b)-f(b) = 0$$

$f(x)$ konvex, ha $h(z)$ alakja:



Ez teljesül, ha $h'(z)$ alakja:



Ez teljesül, ha $h''(z)<0$ minden $0 \leq z \leq 1$

$h'(z) = f(b) - f(a) - f'(a+(b-a)z)(b-a)$

$h''(z) = -f''(a+(b-a)z)(b-a)^2$

$h''(z)<0$ ha $f''(x) \geq 0$

<u>Tétel</u> Az $f(x)$ fv konvex (konkáv) az I intervallumon, ha $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ minden $x \in I$.

<u>Def</u> Az $f(x)$ fvnek az x_0 inflexiós pontja, ha x_0 konvex részt konkávtól választ el.

Pl. $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2x)\,e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2-2) = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{4} \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\sqrt{2}/2 \qquad \sqrt{2}/2$

	$x<-\sqrt{2}/2$	$x=-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2<x<\sqrt{2}/2$	$x=\sqrt{2}/2$	$x>\sqrt{2}/2$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	konvex	inflexiós p.	konkáv	infl. p.	konvex

Teljes függvényvizsgálat részei: ÉT; zérushelyek; monotonitás; szélsőértékek; konvexitás; inflexiós pontok; páros vagy páratlan; periodikusság; határértékek szakadási helyeken és az értelmezési tartomány szélein; ÉK.

Pl. $f(x) = x(\ln x)^2$

$ÉT = \mathbb{R}^+$

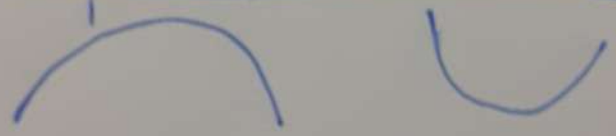
$f(x) = 0 \Rightarrow x(\ln x)^2 = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

monotonitás: $f'(x) = (\ln x)^2 + x(2\ln x)\cdot\frac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x =$

$\ln x \cdot (2 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

	$0<x<e^{-2}$	$x=e^{-2}$	$e^{-2}<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	nő	lok.max	csökken	lok.min	nő



Konvexitás: $f''(x) = 2\ln x\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(1+\ln x) = 0$

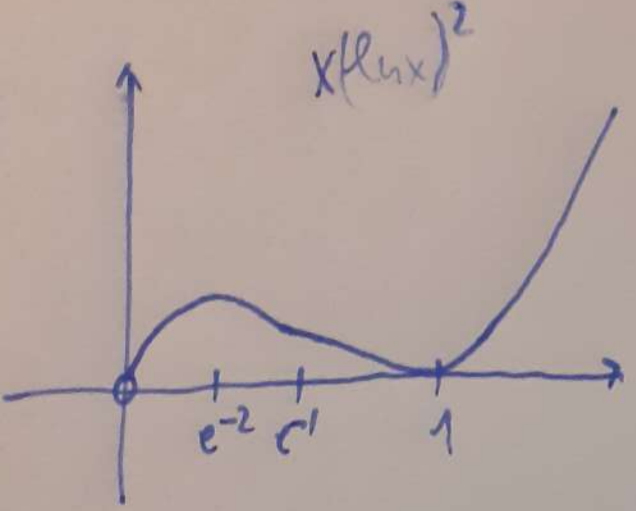
$\Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

	$0<x<e^{-1}$	$x=e^{-1}$	$x>e^{-1}$
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	konkáv	infl.p.	konvex

$\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln x)^2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{1/x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{-\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2/x}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0.$



$x(\ln x)^2$
e^{-2}
e^{-1}
1

4. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$

$x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

Függvényvizsgálat

Cél: Az $f(x)$ fv alakhelyes grafikonjának elkészítése.

Def Ha az $f(x)$ fv deriváltja, az $f'(x)$ újra deriválható, akkor azt az $f(x)$ fv második deriváltjának hívjuk:

$f''(x) = (f'(x))'$.

Harmadik derivált: $f'''(x) = (f''(x))'$

Negyedik derivált: $f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$

Pl. $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

$\vdots$

$f^{(2024)}(x) = \sin x$

Monotonitás

Def Az $f(x)$ fv monoton nő (csökken) az I intervallumon, ha $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ esetén $f(x_1) \le f(x_2)$ $\left(f(x_1) \ge f(x_2)\right)$.

Tétel Ha $f(x)$ deriválható az I intervallumon és $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), akkor monoton nő ott.

Biz Legyen $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$. Ekkor alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel az $f(x)$ fv-re, mert $f(x)$

1., deriválható $[x_1, x_2]$-ben és így

2., folytonos $(x_1, x_2]$-ben

Tehát létezik egy $x_1 < c < x_2$, hogy $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Mivel $f'(c) \geq 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, azaz $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Pl. Hol monoton nő / csökken az $f(x) = x^3 - 3x$ fv?

Megoldás: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

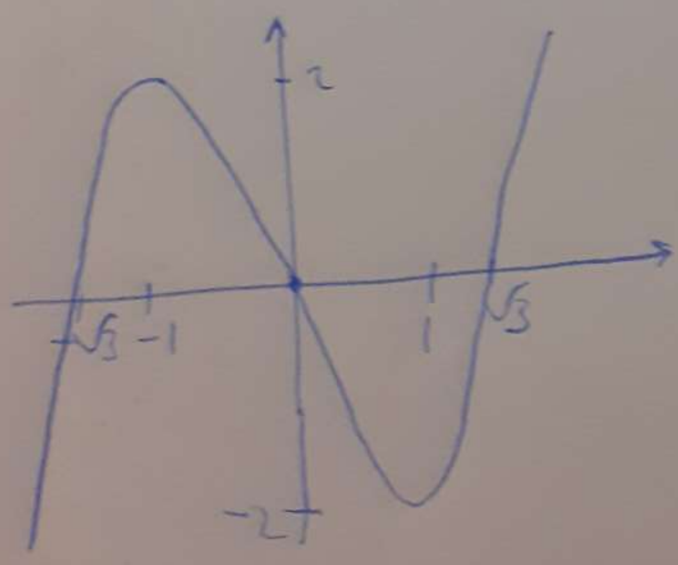
	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	nő		csökken		nő

gyökök:

$x^3 - 3x = 0$

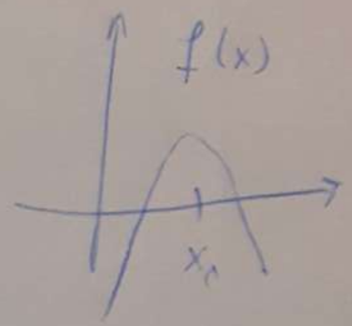
$x(x^2 - 3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3}$



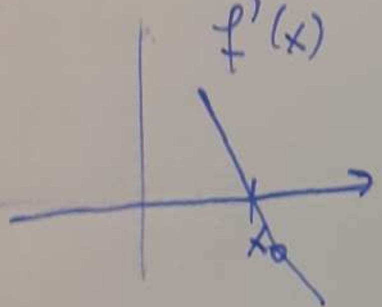
Def Az $f(x)$ függv. az x_0-ban lokális maximuma (minimuma) van, ha létezik egy x_0-t tartalmazó I nyílt intervallum, hogy minden $x \in I$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.

Hogyan dönthető el, hogy $f(x)$-nek x_0-ban lok. max-a van?



Ekkor

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f(x)$	nő	lok. max	csökken
$f'(x)$	+		−



$f'(x)$ $x = x_0$-ban monoton csökken, ha $f''(x_0)$.

Tétel Az $f(x)$ függv. az x_0-ban lokális maximuma (minimuma) van ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$.

Megj. Ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)$, akkor lehet, hogy $f(x)$-nek x_0-ban lokális maximuma vagy minimuma van, de az is lehet, hogy nincs szélsőértéke

Pl. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 6x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

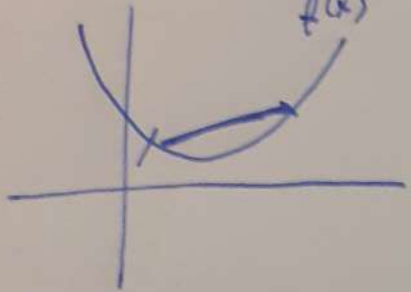
$f''(x) = 12x - 6$ $\qquad f'(0)=0,\ f'(1)=0$

$f''(0) = 12 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow x_1 = 0$-ban lok. max. van.

$f''(1) = 12 \cdot 1 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow x_2 = 1$-ben lok. min. van

Konvexitás

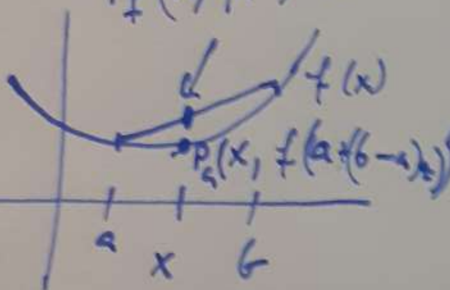
Def Az $f(x)$ fv az I intervallumon konvex (konkáv), ha bármely I-ben lévő húr a görbe felett (alatt) van.



konvex

Feladat: Döntsük el, hogy hol konvex az $f(x)$ fv grafikonja!

$P_f(x, f(a)+(f(b)-f(a))z)$



húr meredeksége: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

húr egyenesének egyenlete:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$x=a+(b-a)z, \quad 0\le z\le 1$$

Az egyenes $x=a+(b-a)z$ abszcisszájú pontjához tartozó második koordinátája:

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a+(b-a)z-a)=$$

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)z=f(a)+(f(b)-f(a))z$$

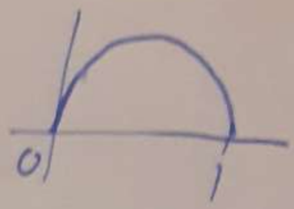
Legyen $h(z)$ a P_f és P_a pontok második koordinátáinak különbsége:

$$h(z)=f(a)+(f(b)-f(a))z-f(a+(b-a)z)\ge 0$$

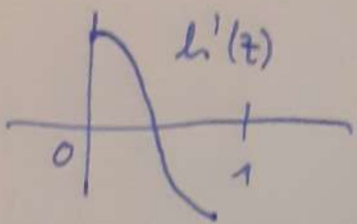
$$h(0)=f(a)+(f(b)-f(a))0-f(a+(b-a)0)=f(a)-f(a)=0$$

$$h(1)=f(a)+(f(b)-f(a))\cdot 1-f(\underbrace{a+(b-a)1}_{b})=f(b)-f(b)=0$$

$f(x)$ konvex, ha $h(z)$ alakja:



Ez teljesül, ha $h'(z)$ alakja:



Ez teljesül, ha $h''(z)<0$ minden $0 \le z \le 1$

$$h'(z) = f(b) - f(a) - f'(a+(b-a)z)(b-a)$$

$$h''(z) = -f''(a+(b-a)z)(b-a)^2$$

$h''(z)<0$ ha $f''(x)>0$

<u>Tétel</u> Az $f(x)$ fv konvex (konkáv) az I intervallumon, ha $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) minden $x \in I$.

<u>Def</u> Az $f(x)$ fvnek az x_0 inflexiós pontja, ha x_0 konvex részt konkávtól választ el.

Pl. $f(x) = e^{-x^2}$

$$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2x)\,e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2-2) = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-\sqrt{2}/2$ $\quad$ $\sqrt{2}/2$

	$x<-\sqrt{2}/2$	$x=-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2<x<\sqrt{2}/2$	$x=\sqrt{2}/2$	$x>\sqrt{2}/2$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	konvex	inflexiós p.	konkáv	infl. p.	konvex

Teljes függvényvizsgálat részei: ÉT; zérushelyek; monotonitás; szélsőértékek; konvexitás; inflexiós pontok; páros vagy páratlan; periodikusság; határértékek nevezetes helyeken és az értelmezési tartomány szélein; ÉK.

Pl. $f(x) = x(\ln x)^2$

$ÉT = \mathbb{R}^+$

$f(x) = 0 \Rightarrow x(\ln x)^2 = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

monotonitás: $f'(x) = (\ln x)^2 + x(2\ln x)\cdot\frac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x =$

$\ln x \cdot (2 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$0 \quad e^{-2} \quad 1$

	$0<x<e^{-2}$	$x=e^{-2}$	$e^{-2}<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	nő	lok.max	csökken	lok.min	nő

Konvexitás: $f''(x) = 2\ln x\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(1+\ln x) = 0$

$\Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

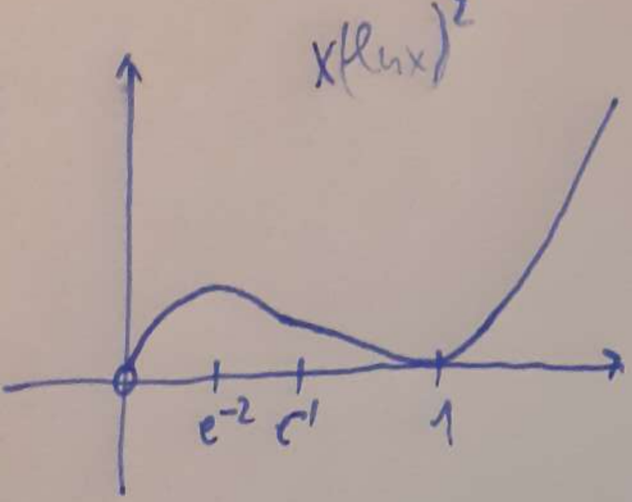
$0 \quad e^{-1}$

	$0<x<e^{-1}$	$x=e^{-1}$	$x>e^{-1}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl.p.	konvex

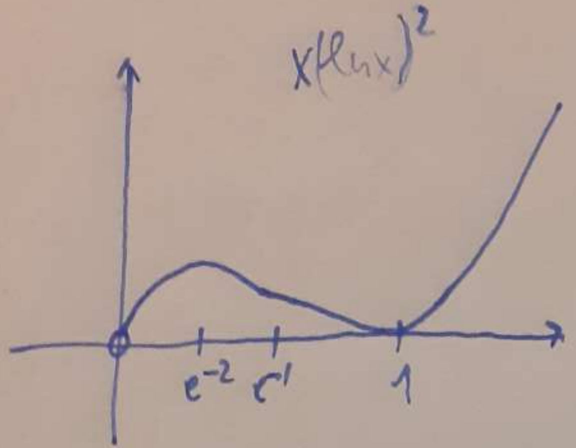
$\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln x)^2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{1/x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{-\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2/x}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0.$



x(ln x)^2
e^-2
e^-1
1



Globális szélsőértékek keresése zárt intervallumon

Def Az $f(x)$ fv kritikus pontja az x_0, ha vagy ott az $f(x)$ nem deriválható vagy $f'(x_0)=0$.

Def Az $f(x)$ fv globális maximuma (minimuma) az I zárt intervallumon az $f(x_0)$ érték, ha minden $x \in I$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$ $\left(f(x) \geq f(x_0)\right)$.

Az $f(x)$ fv I-ben vett globális szélsőértékei a következő helyeken lehetnek:

1., kritikus pontokban

2., az I végpontjaiban

Pl. 1. $f(x) = x^2+3x+1$, $-10 \leq x \leq 10$

Kritikus pontok: $f'(x) = 2x+3 = 0 \Rightarrow x = -1{,}5$

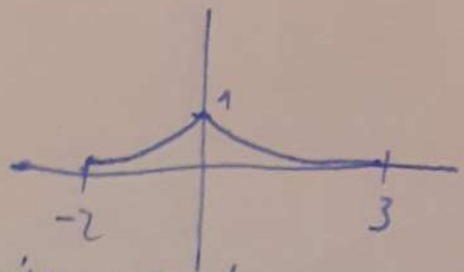
$f(-1{,}5) = (-1{,}5)^2+3(-1{,}5)+1 = \underline{-1{,}25}$ min

Végpontok $f(-10) = (-10)^2+3(-10)+1 = 71$

$f(10) = 10^2+3\cdot 10+1 = \underline{131}$ max

2. $f(x)=e^{-|x|}$, $-2\le x\le 3$

$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & 0\le x\le 3 \\ e^{x} & -2\le x<0 \end{cases}$



f(x) deriválható $-2\le x\le 3$ kivéve $x=0$-t.

$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & 0<x<3 \\ e^{x} & -2<x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)\ne 0$

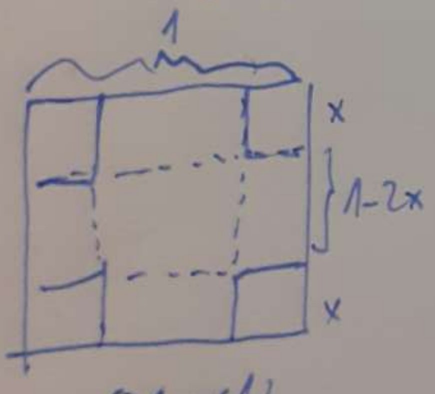
Kritikus pont: $x=0$, $f(0)=e^{-|0|}=1$ max

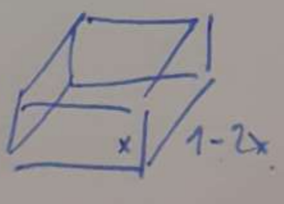
Végpontok: $f(-2)=e^{-|-2|}=e^{-2}$

$f(3)=e^{-|3|}=e^{-3}$ min

<u>Szöveges szélsőérték feladatok</u>

1. 1 m élhosszúságú négyzet alakú kartondoboz. Készítsünk belőle legnagyobb térfogatú felül nyitott dobozt!





$V(x)=(1-2x)^2x=$
$(1-4x+4x^2)x=$
$4x^3-4x^2+x$
max

$0\le x\le 1/2$

$V'(x)=12x^2-8x+1=0$ $\quad x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{24}=\frac{8\pm4}{24}$ $\begin{cases}1/2\\1/6\end{cases}$

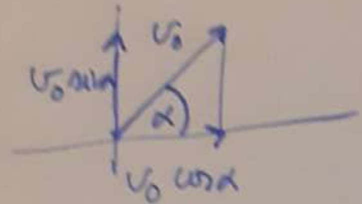
$V(\frac{1}{6})=(1-2\cdot\frac{1}{6})^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{54}$ max

$V(0)=0$

$V(1/2)=0$

2. v_0 kezdősebességgel kilövünk egy ágyúból egy ágyúgolyót. Milyen szögben lőjük ki, hogy a legmesszebbre repüljön?

Megoldás:



Mennyi ideig repül a golyó?

A földet érésig a felfelé megtett út: $v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2$

Földet érés: $v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2 = 0$

$$v_0 \sin\alpha \, t = \frac{g}{2}t^2$$

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Tehát a golyó $\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ ideig repül.

Az eddig vízszintes irányba megtett út: $s = \frac{2v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \cdot v_0 \cos\alpha$

$s(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin\alpha \cos\alpha$ maximumát keressük, ha $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

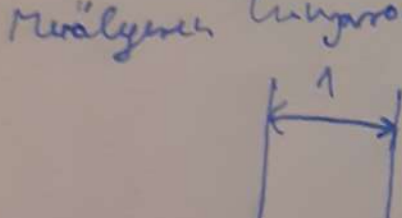
$$s'(\alpha) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha)\right) = 0$$

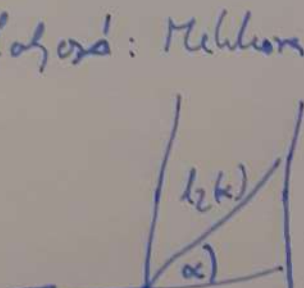
$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0, \quad \sin\alpha, \cos\alpha \ge 0$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

($s(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ maximuma $2\alpha = \pi/2$-nél van $\alpha = \pi/4$).

3. Merőlegesen kanyarodó folyosó: Mekkora létrát lehet átvinni?





α szög mentén elforgatott létra hossza $\le l_1(\alpha) + l_2(\alpha)$

$l_1(\alpha)\sin\alpha = 1 \Rightarrow l_1(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}$

$l_2(\alpha)\cos\alpha = 1 \Rightarrow l_2(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}$

Keressük az $l(\alpha) = l_1(\alpha) + l_2(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ minimumát!

$$l'(\alpha) = \frac{0-\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{0-(-\sin\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{-\cos^3\alpha + \sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 0$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha > 0,\ \cos\alpha > 0$

$-\cos^3\alpha + \sin^3\alpha = 0$

$\sin^3\alpha = \cos^3\alpha$

$\sin\alpha = \cos\alpha$

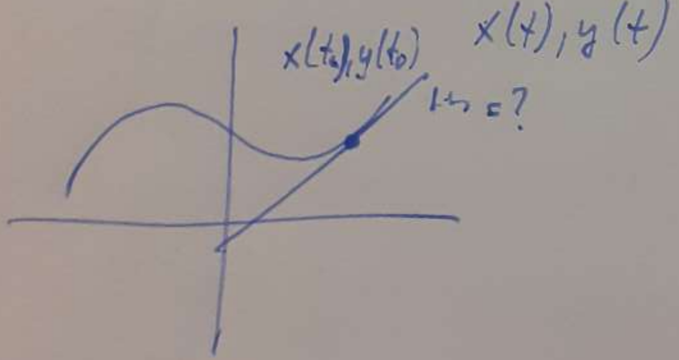
$\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

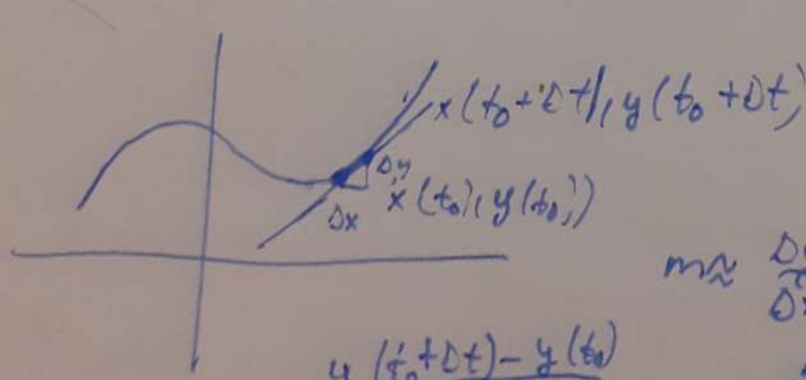
	$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$	$\alpha=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$
$l'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$l(\alpha)$	csökken	min	nő

$$\min l(\alpha) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} + \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

A legfeljebb $2\sqrt{2}$ hosszú létra vihető át.

Paraméteresen adott görbe deriváltja





$$m \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)} =$$

$$\frac{\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}}{\frac{x(t_0+\Delta t)-x_0(t_0)}{\Delta t}} \approx \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

Tétel

$$m = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$\dot{x}$: $x(t)$ t szerinti deriváltja

Pl. 1. $x = t$ $\quad t_0 = 1$-ben érintő meredeksége

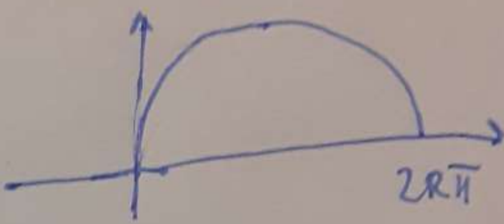
$y = t^2+1$

$m = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t}{1}$

$m = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$

2. Ciklois: $x = R(t - \sin t)$

$y = R(1 - \cos t)$



$t_0 = \pi/4$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{R \sin t}{R(1-\cos t)}$$

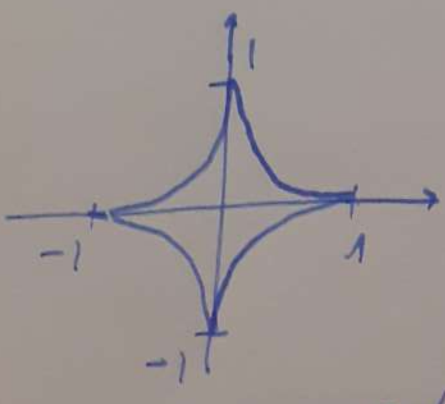
$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{R \cdot \sin\frac{\pi}{4}}{R\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}+1$$

3. Asztroid

$x = \cos^3 t$

$y = \sin^3 t$

$0 \le t \le 2\pi$



$t_0 = \pi/3$ érintő

$$x(t_0) = \cos^3\frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}, \quad y(t_0) = \sin^3\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$m = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -\operatorname{tg} t \qquad m\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

érintő: $y - \frac{3\sqrt{3}}{8} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{8}\right) = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{8}$

$y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Görbék pontbeli érintkezése, görbület, simulókör

Def Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ görbék n-edrendben érintkeznek az $x=a$ helyen, ha

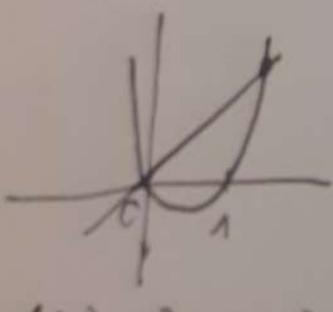
$$f(a)=g(a)$$
$$f'(a)=g'(a)$$
$$f''(a)=g''(a)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a),$$

de $f^{(n+1)}(a)\neq g^{(n+1)}(a)$.

Pl. 1. $f(x)=x^2-x$, $g(x)=x$, $a=2$, $f(2)=2^2-2=2=g(2)=2$

$f'(x)=2x-1$, $g'(x)=1$ $\quad f(2)=2\cdot2-1=3\neq g(2)=1$

$\Rightarrow$ 0-adrendben érintkeznek



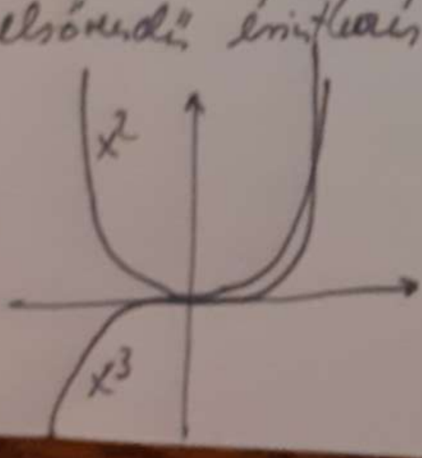
0-adrendű érintkezés: metszés

2. $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$, $a=0$, $f(0)=0^2=0=g(0)=0^3=0$

$f'(x)=2x$, $g'(x)=3x^2$ $\quad f'(0)=2\cdot0=0$, $g'(0)=3\cdot0^2=0$

$f''(x)=2$, $g''(x)=6x$ $\quad f''(0)=2\neq g''(0)=6\cdot0=0$

$\Rightarrow$ elsőrendű érintkezés



legalább elsőrendű érintkezés: közös érintő

3. $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin^2 x$, $a=0$ $f(0)=0^2=0 = g(0)=\sin^2 0=0$

$f'(x)=2x$, $g'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$ $f'(0)=2\cdot 0=0 = g'(0)=\sin 0=0$

$f''(x)=2$, $g''(x)=2\cos 2x$ $f''(0)=2 = g''(0)=2\cos 0=2$

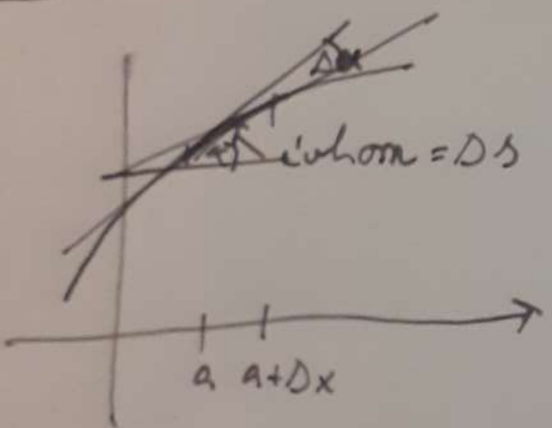
$f'''(x)=0$, $g'''(x)=-4\sin 2x$ $f'''(0)=0 = g'''(0)=-4\sin 0=0$

$f^{(4)}(x)=0$, $g^{(4)}(x)=-8\cos 2x$ $f^{(4)}(0)=0 \neq g^{(4)}(0)=-8\cos 0=-8$

Harmadrendű érintkezés

Az $f(x)$ görbe $x=a$ pontbeli görbülete az érintő elfordulását mutatja az ívhosszhoz viszonyítva

<u>Def</u>

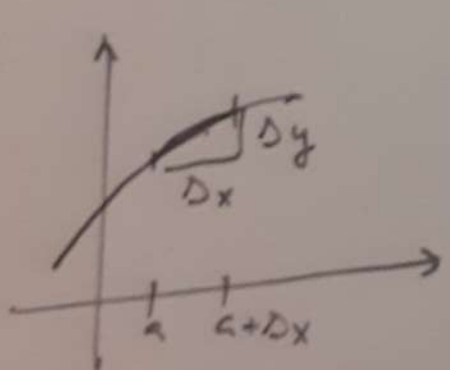


Az „a"-beli görbület

$$G = G(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}.$$

Kiszámítás:

$$G \approx \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}$$



$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2\left(1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)} =$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x \approx \sqrt{1+f'(a)}\cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta x} \approx \sqrt{1+f'(a)^2}$$

$$f'(a) = m = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = \alpha(a) = \operatorname{arctg} f'(a)$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta x} \approx \alpha'(a) = \frac{1}{1+f'(a)^2} \cdot f''(a) = \frac{f''(a)}{1+f'(a)^2}$$

$$G \approx \frac{\frac{\Delta \alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} \approx \frac{\frac{f''(a)}{1+f'(a)^2}}{\sqrt{1+f'(a)^2}} = \frac{f''(a)}{(1+f'(a)^2)^{3/2}}$$

Tehát $G(x) = \dfrac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$

<u>Megj.</u> 1. Ha két görbe legalább másodrendben illeszkedik $x=a$-ban, akkor a görbületük megegyezik ott.

2. $G(x) \equiv 0 \Leftrightarrow f''(x) \equiv 0 \Leftrightarrow f'(x) = m, \ m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f(x) = mx + b$,

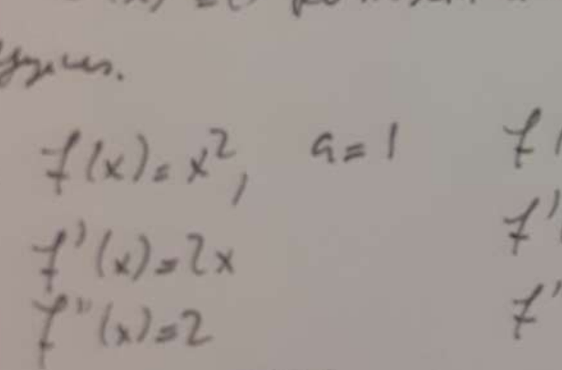
azaz $G(x) \equiv 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f(x)$ grafikonja egy egyenes.

Pl. 1. $f(x) = x^2$, $a = 1$

	$f(1) = 1$
$f'(x) = 2x$	$f'(1) = 2$
$f''(x) = 2$	$f''(1) = 2$

$$G(1) = \frac{f''(1)}{(1+f'(1)^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+2^2)^{3/2}} = \frac{2}{5^{3/2}}$$

2.



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y^2 = R^2 - x^2$$

$$f(x) = y = \sqrt{R^2 - x^2} = (R^2 - x^2)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1\cdot\sqrt{R^2-x^2} - x\cdot\frac{1}{2}(R^2-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x)}{R^2-x^2} =$$

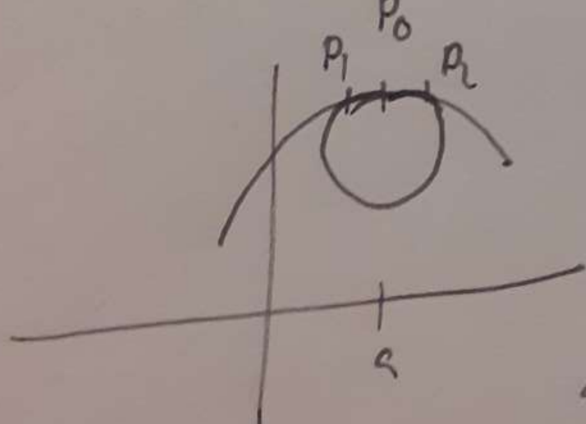
$$-\frac{\sqrt{R^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2} = -\frac{\frac{R^2-x^2+x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2} = -\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}$$

$$G(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}} = \frac{-\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}}{\left(1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{-\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}}{\Big(\underbrace{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}_{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2}}\Big)^{3/2}} =$$

$$-\frac{\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}}{\frac{R^3}{(R^2-x^2)^{3/2}}} = -\frac{1}{R}$$

<u>Def</u> Adott egy $f(x)$ fv és egy $x=a$ pont. Azt az (u,v) középpontú R sugarú kört – azaz $(x-u)^2+(y-v)^2=R^2$ egyenletű kört –, amihez tartozó fv legalább másodrendben érintkezik az $f(x)$ görbével az $x=a$-ban, az $f(x)$ fv simulókörének mondjuk.

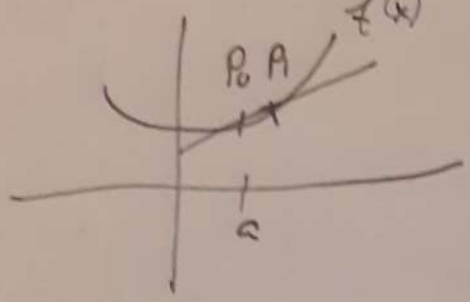
Másképp:



P_0 környékén választok P_1, P_2 pontokat, ezeken keresztül kört húzok.

Ha $P_1, P_2 \to P_0$, akkor a körök határhelyzete a simulókör.

Rgj:



Ha P_0 környékén egy P_1 görbepontot választok és meghúzom a P_0P_1 egyenest, majd P_1-gyel P_0-hoz tartunk, akkor az így kapott egyenesek határhelyzete az „érintő".

Kiszámolható:

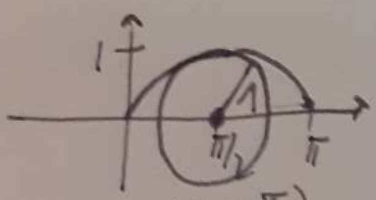
$$u = a - \frac{1+f'(a)^2}{f''(a)} f'(a)$$

$$v = f(a) + \frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}$$

$$R = \left|\frac{1}{G(a)}\right|$$

Tehát a simulókör sugara a görbület reciprokának abszolút értéke.

Pl. $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{2}$-ben simulókör. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$



$f'(x) = \cos x \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$f''(x) = -\sin x \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

$$G = \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(1+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{-1}{(1+0^2)^{3/2}} = -1 \Rightarrow R = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1$$

$$u = \frac{\pi}{2} - \frac{1+0^2}{-1} \cdot 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$v = 1 + \frac{1+0^2}{-1} = 0$$

Simulókör: $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1$