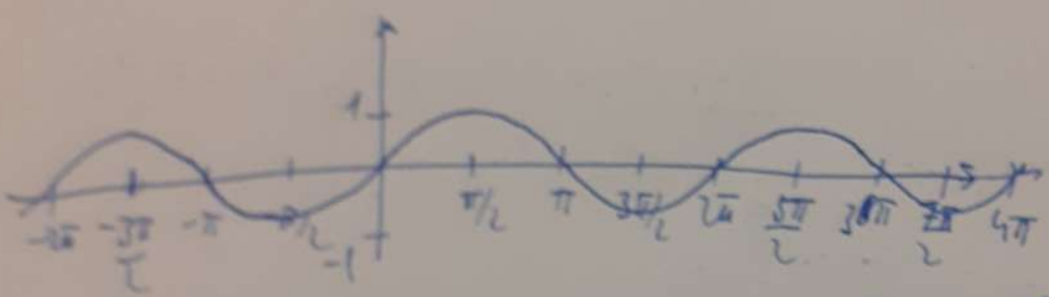
Függvények

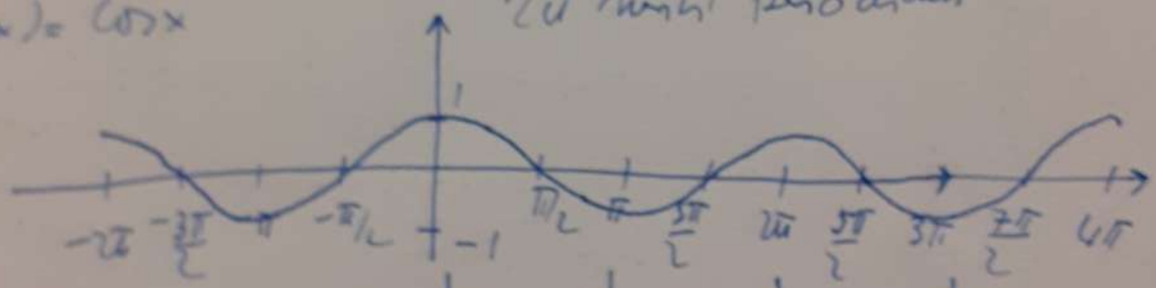
Korábbi fogalmak: valós fv, ÉT, ÉK, alsó és felső korlát, monotonitás.

Def Az $f(x)$ fv periodikus, ha létezik $l>0$, hogy $f(x+l)=f(x)$ $x \in D_f$.

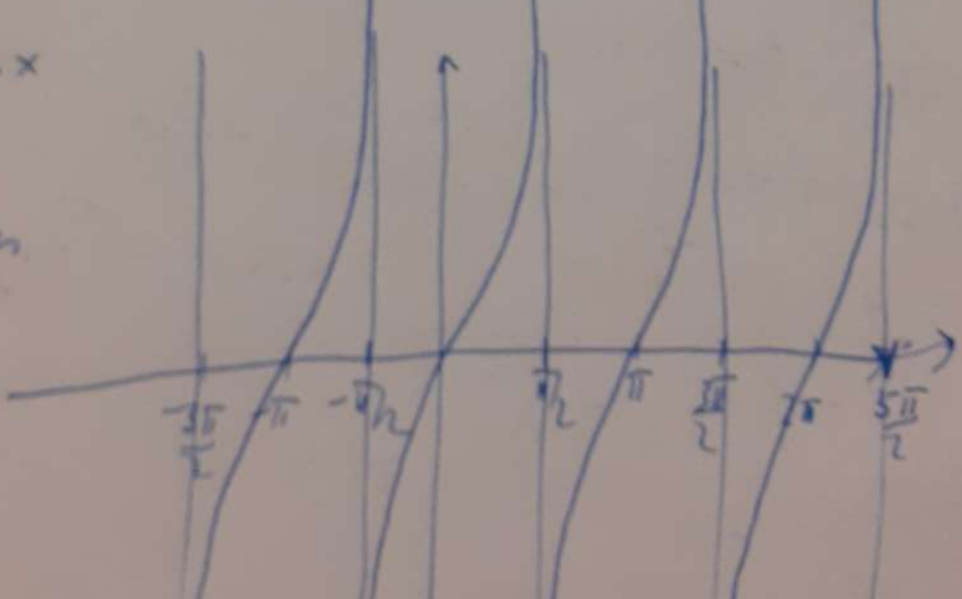
Pl. $f(x) = \sin x$ 2π - szerint periodikus



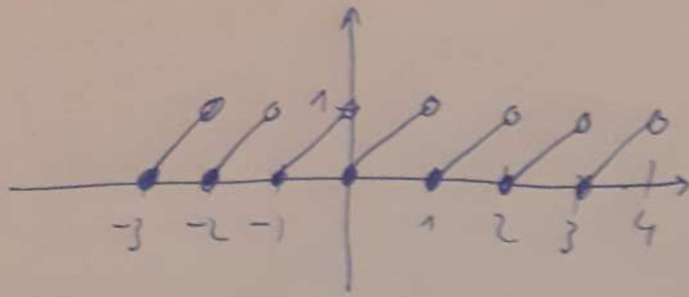
$f(x) = \cos x$ 2π szerint periodikus



$f(x) = \operatorname{tg} x$
π - szerint periodikus

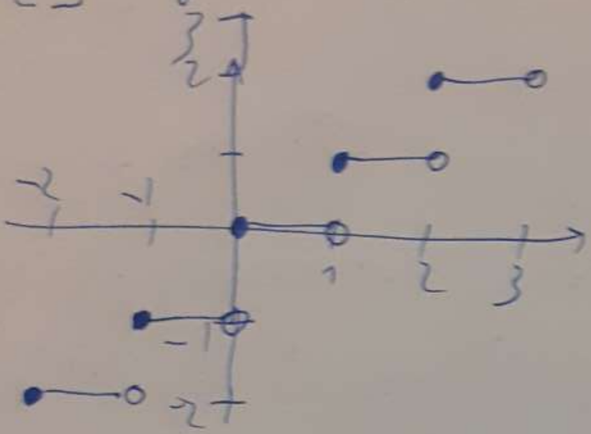


$f(x) = \{x\}$ x törtrész $\{7{,}2\} = 0{,}2$, $\{-2{,}6\} = 0{,}4$



1-szerint periodikus

$f(x) = [x]$ egészrész

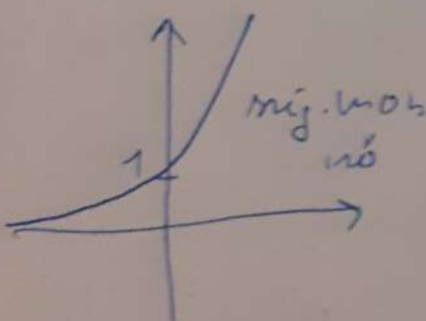


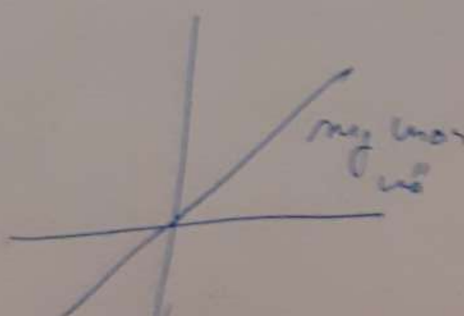
nem periodikus

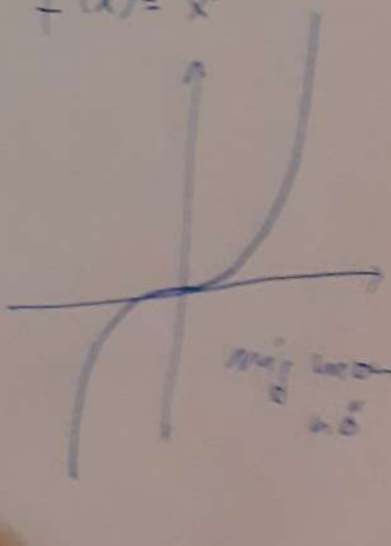
Az $f(x)$ fv kölcsönösen egyértelmű, ha $x, x' \in D_f$, $x \neq x'$ esetén $f(x) \neq f(x')$, azaz különböző értékekhez különböző értékeket rendel.

Az $f(x)$ fv szigorúan monoton nő (csökken), ha $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

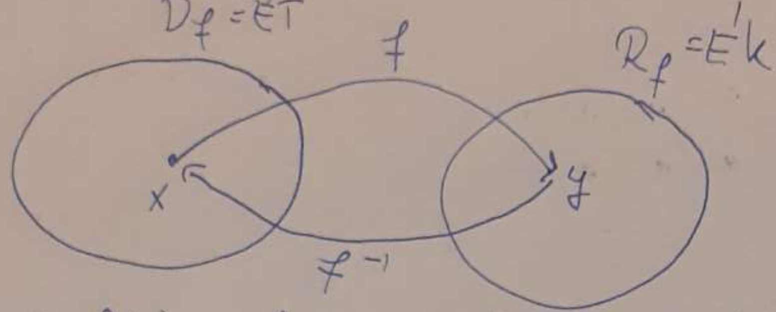
Pl. $f(x) = e^x$: $f(x) = x$ $f(x) = x^3$







Tegyük fel, hogy $f(x)$ kölcsönösen egyértelmű fv



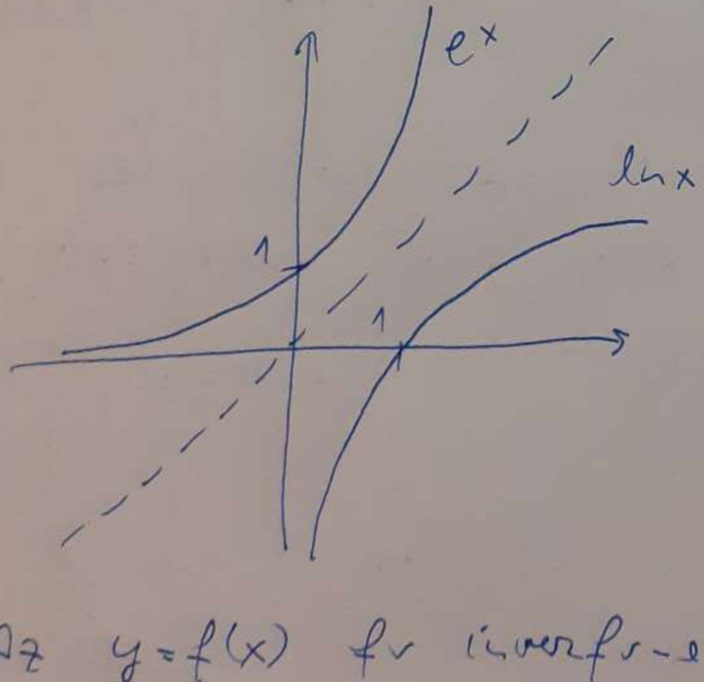
$y = f(x)$, jelölje f^{-1} azt a fvt, amire $f^{-1}(y) = x$

Tehát $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$

$y = f(x) = f(f^{-1}(y))$ $\quad$ f^{-1}: inverz fv

Az $f(x) = a^x$ $\quad (a > 0,\ a \neq 1)$ exponenciális fv inverze a $f^{-1}(x) = \log_a x$ fv, mert $\quad f(f^{-1}(x)) = a^{f^{-1}(x)} = a^{\log_a x} = x$

Az $f(x) = e^x$ inverze az $f^{-1}(x) = \log_e x = \ln x$, amit természetes alapú logaritmusnak hívunk.



Az f és f^{-1} grafikonja mindig a 45°-os meredekségű egyenesre szimmetrikusan van.

Az $y = f(x)$ fv inverzfv-ét úgy számoljuk ki, hogy az $y = f(x)$ egyenletből x-et fejezzük ki

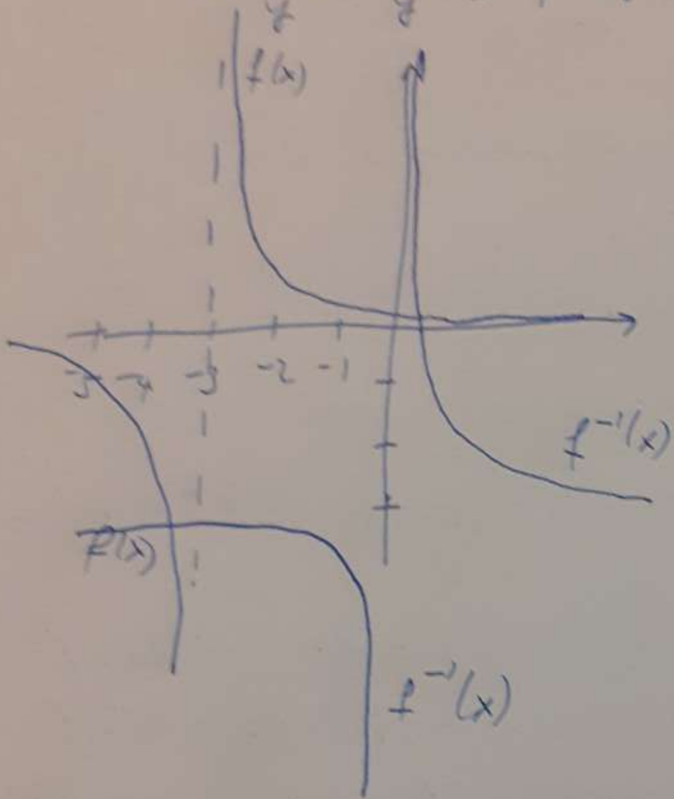
Pl. $y=\frac{1}{x+3}=f(x)$, $x\neq -3$

$(x+3)y=1$

$xy+3y=1$

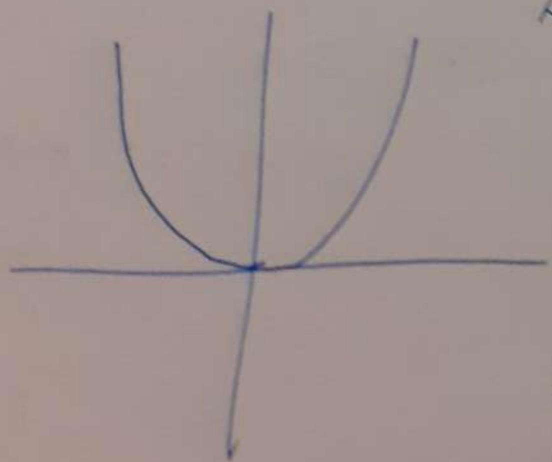
$xy=1-3y$

$x=\frac{1-3y}{y}=\frac{1}{y}-3=f^{-1}(y)$, másképp $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}-3$, $x\neq 0$



$y=e^{x} \Rightarrow x=\ln y=f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x)=\ln x$

Vannak olyan fvek, amik nem kölcsönösen egyértelműek. Pl. $f(x)=x^2$ $\quad f(1)=1=f(-1)$



Az $f(x)=x^2$ ÉT $=\mathbb{R}$.

Ha csak $x\geq 0$ számokon tekintjük az $f(x)=x^2$ fvt, akkor ott már kölcsönösen egyértelmű:

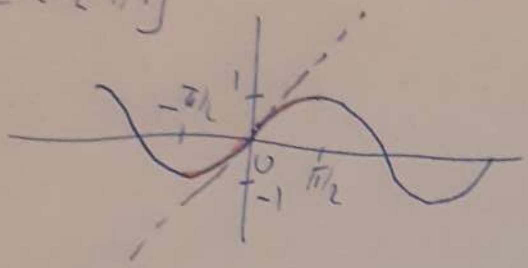
$x\geq 0$: $y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}=f^{-1}(y)$

tehát $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

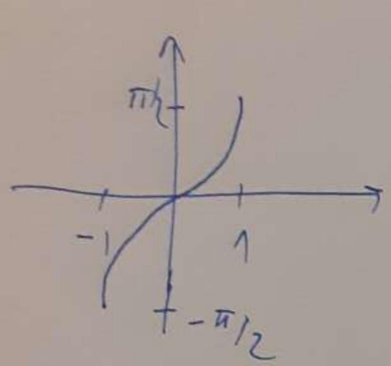
Trigonometrikus fvek inverzei

$f(x) = \sin x$
ÉK $= [-1, 1]$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-ben szigorúan monoton nő és ott minden $[-1, 1]$-beli értéket felvesz, ezért $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-ben vesszük az inverzét



inverz: arkuszszinusz fv $\arcsin x = \sin^{-1} x$



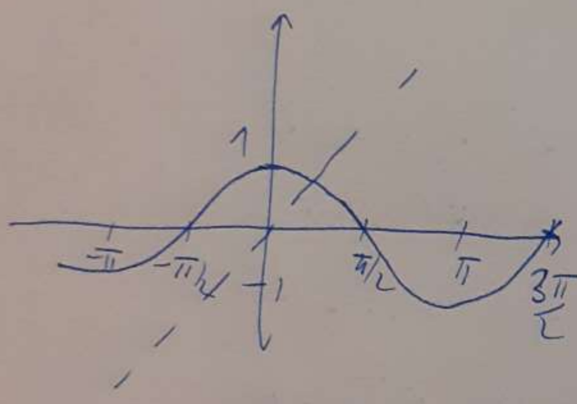
ÉT $= [-1, 1]$
ÉK $= [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, mert $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

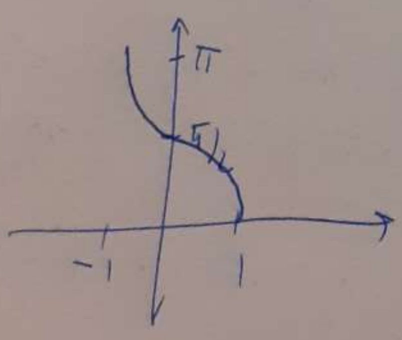
$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$, mert $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x) = \cos x$

$[0, \pi]$-ben szigorúan monoton csökken és ott minden $[-1, 1]$-beli értéket felvesz, ezért $[0, \pi]$-ben vesszük az inverzét



inverz: arkuszkoszinusz fv : $\arccos x = \cos^{-1} x$



ÉT $= [-1, 1]$
ÉK $= [0, \pi]$

$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, mert $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

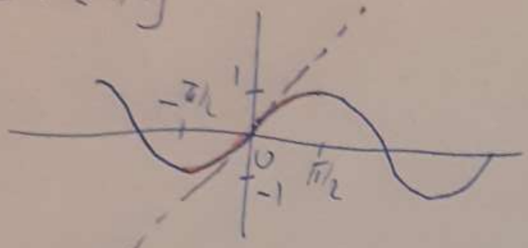
$\arccos(-1) = \pi$, mert $\cos \pi = -1$

Trigonometrikus függvények inverzei

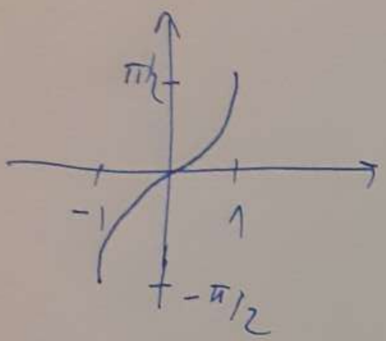
$f(x) = \sin x$

$ÉK = [-1, 1]$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-ben szigorúan monoton nő és ott minden $[-1, 1]$-beli értéket felvesz, ezért $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-ben van neki inverze



inverz: arkuszszinusz fv $\arcsin x = \sin^{-1} x$



$ÉT = [-1, 1]$

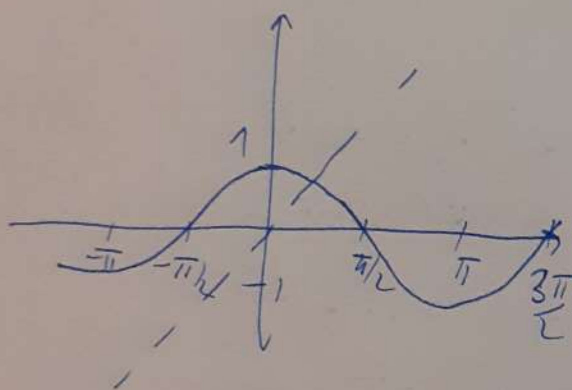
$ÉK = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, mert $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

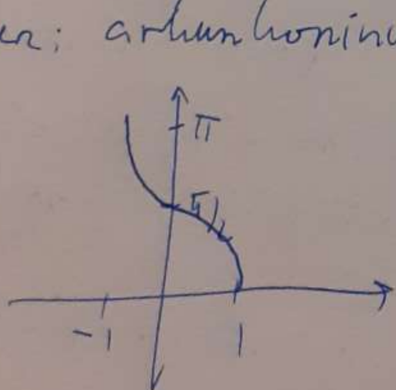
$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$, mert $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x) = \cos x$

$[0, \pi]$-ben szigorúan monoton csökken és ott minden $[-1, 1]$-beli értéket felvesz, ezért $[0, \pi]$-ben van neki inverze



inverz: arkuszkoszinusz fv: $\arccos x = \cos^{-1} x$



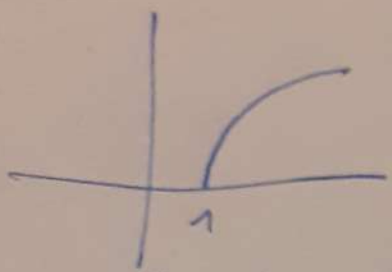
$ÉT = [-1, 1]$

$ÉK = [0, \pi]$

$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, mert $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arccos(-1) = \pi$, mert $\cos \pi = -1$

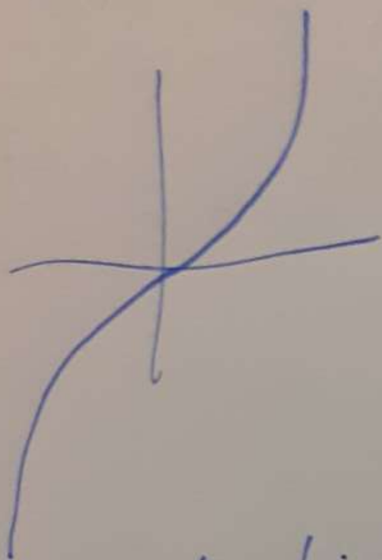
~~archx~~ areakoszinuszhiperbolikusz : $\operatorname{arch} x = \cosh^{-1} x$ (7)



$\acute{E}T: [1, +\infty[$

$\acute{E}K: [0, +\infty[$

szinuszhiperbolikus fv: $\operatorname{sh} x = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$



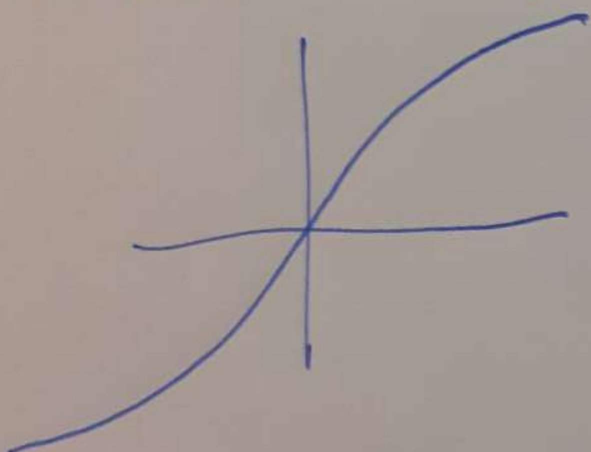
$\acute{E}T = \mathbb{R}$

$\acute{E}K = \mathbb{R}$

szigorúan monoton nő

páratlan fv

az inverze: areaszinuszhiperbolikus fv: $\operatorname{arsh} x = \sinh^{-1} x$



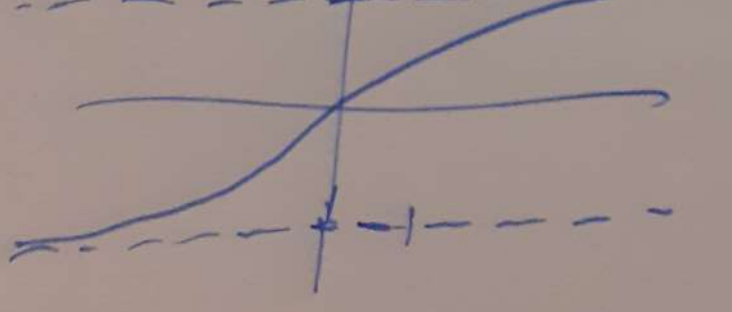
$\acute{E}T = \mathbb{R}$

$\acute{E}K = \mathbb{R}$

szigorúan monoton nő

páratlan fv

tangenshiperbolikus fv: $\operatorname{th} x = \tanh x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



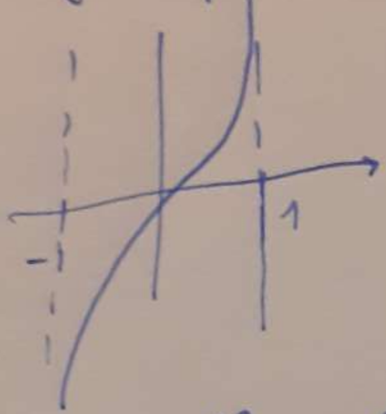
$\acute{E}T: \mathbb{R}$

$\acute{E}K:]-1, 1[$

szig. mon. nő

páratlan fv

Inverz: areatangenshiperbolikus fv: $\mathrm{arth}\, x = \tanh^{-1} x$



$ÉT:]-1,1[$
$ÉK: \mathbb{R}$

Kiindulótábl: $ch^2 x - sh^2 x = 1$

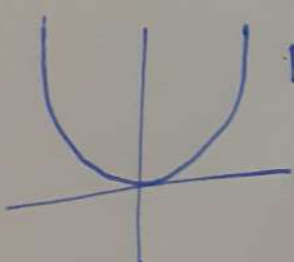
$$ch^2 x = \frac{1 + ch 2x}{2}$$

$$sh^2 x = \frac{ch 2x - 1}{2}$$

Görbék megadása síkon

1. Explicit megadás: $y = f(x)$, azaz $\{(x, f(x)) : x \in D_f\}$

Pl. $y = x^2$

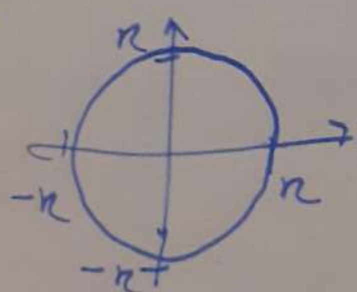


parabola

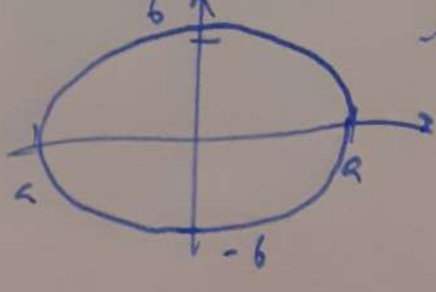
2. Implicit megadás: $F(x,y) = 0$, azaz $\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$

Pl 1. $x^2 + y^2 = R^2$ (vagy $x^2 + y^2 - R^2 = 0$)

kör:

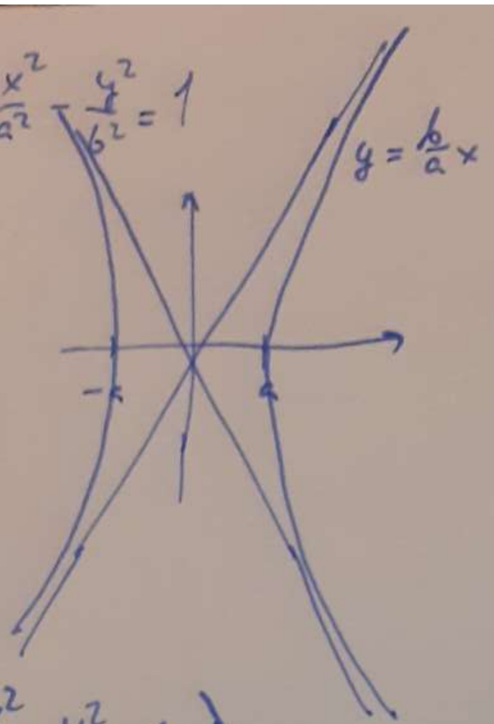


2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



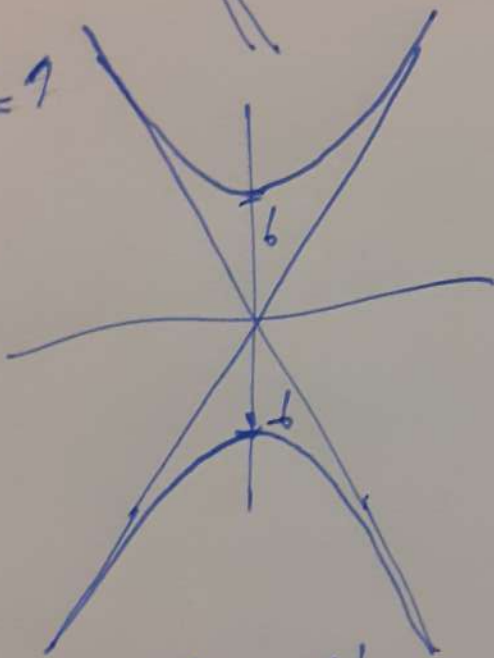
ellipszis

3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



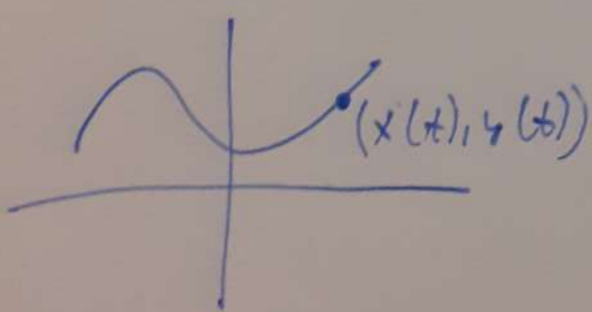
hiperbola

$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



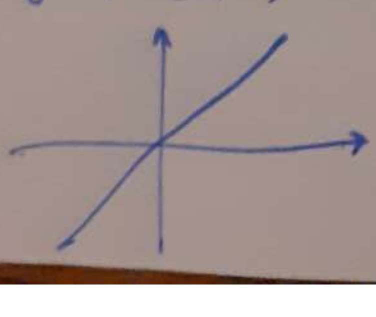
hiperbola

3. Paraméteres megadási mód



Egy síkban mozgó pont pályáját úgy adjuk meg, hogy t-kor $(x(t), y(t))$-ben van a pont

Pl. 1. $x(t), y(t) = (t, t)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

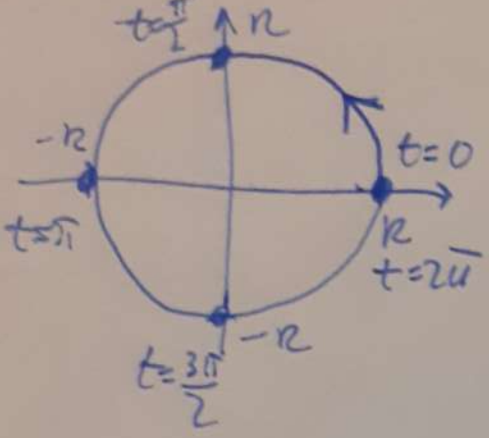


(10)

2. $(x(t), y(t)) = (R\cos t, R\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

$(R\cos t)^2 + (R\sin t)^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$

$\Rightarrow$ R sugarú 0 középpontú körön vagyunk.



$t=0$: $(R\cos 0, R\sin 0) = (R, 0)$

$t=\frac{\pi}{2}$: $(R\cos\frac{\pi}{2}, R\sin\frac{\pi}{2}) = (0, R)$

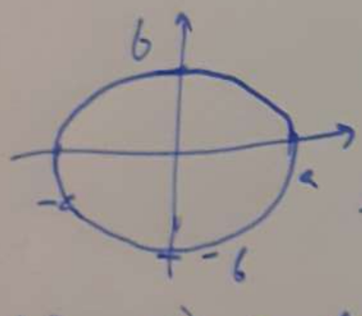
$t=\pi$: $(R\cos\pi, R\sin\pi) = (-R, 0)$

$t=\frac{3\pi}{2}$: $(R\cos\frac{3\pi}{2}, R\sin\frac{3\pi}{2}) = (0, -R)$

$t=2\pi$: $(R\cos 2\pi, R\sin 2\pi) = (R, 0)$

3. $(x(t), y(t)) = (\underbrace{a\cos t}_{x}, \underbrace{b\sin t}_{y})$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$, $a, b > 0$

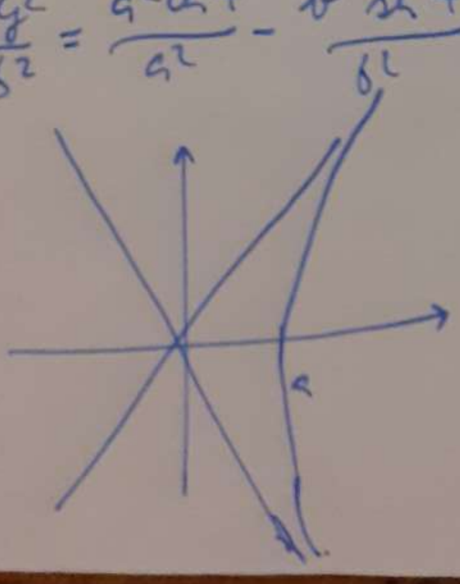
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



ellipszis

4. $(x(t), y(t)) = (a\,\mathrm{ch}\,t, b\,\mathrm{sh}\,t)$ $\quad t \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\mathrm{ch}^2 t}{a^2} - \frac{b^2\mathrm{sh}^2 t}{b^2} = \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$$



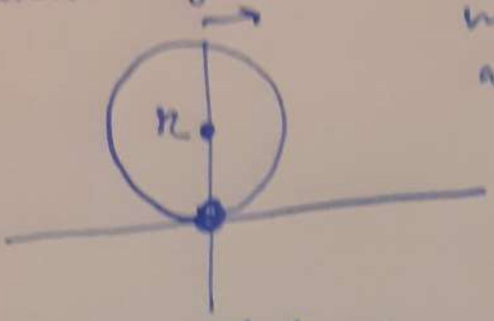
$x = a\,\mathrm{ch}\,t > 0$

hiperbola jobboldali ága

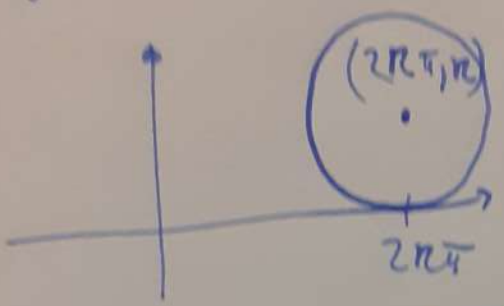
5. Ciklois

Kerék: sugár = R. Egyenletesen. Az eredetileg legalsó pont milyen pályát ír le, míg újra alulra kerül?

Egyenletes sebességgel halad előre a kerék közepe

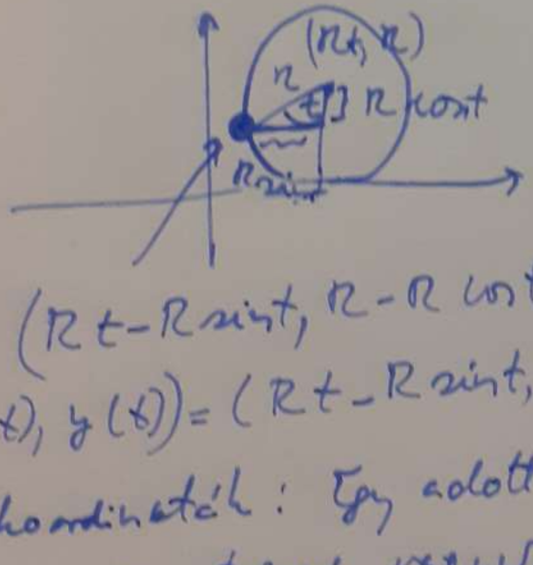


Ha újra alul van:



Ekkor 2π-nyit fordult a kerék

Ha $0 \le t \le 2\pi$, akkor a középpont (Rt, R)-ben van és az eredetileg alsó pont t-vel fordult el



$(Rt - R\sin t, R - R\cos t)$

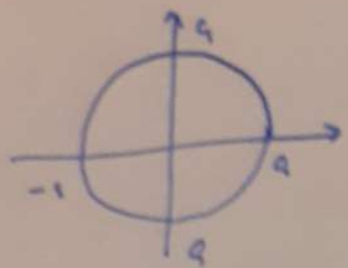
$(x(t), y(t)) = (Rt - R\sin t, R - R\cos t) \quad 0 \le t \le 2\pi$

Polárkoordináták: Egy adott φ mig irányban megmondjuk, hogy milyen távol vagyunk az origótól

$\varphi \to r$

$r(\varphi)$

Pl. 1. $r = a$ $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$: a sugarú kör

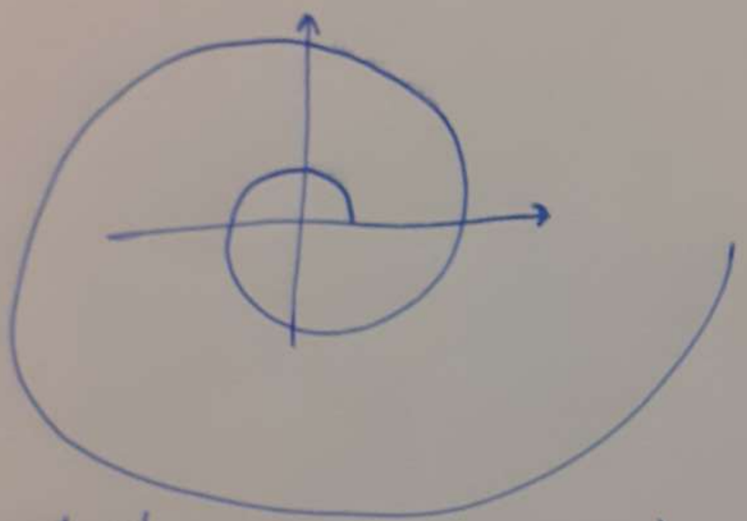


Archimédeszi spirál

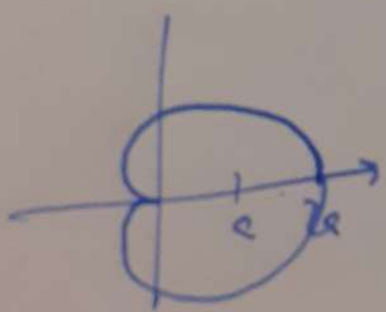
2. $r = a\varphi$, $a > 0$, $\varphi \geq 0$

3. $r = e^{a\varphi}$, $a > 0$, $\varphi \geq 0$

logaritmikus spirál

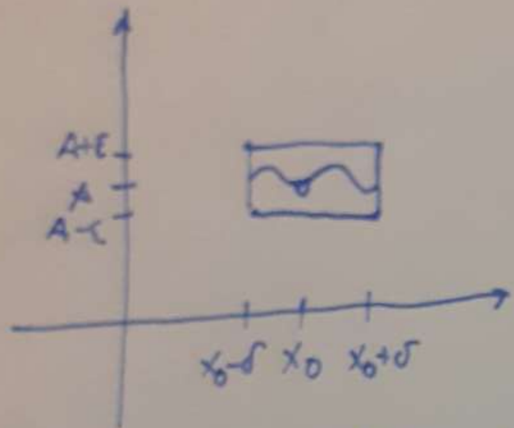


4. kardioid $\quad r = a(1 + \cos\varphi)$



Függvény határértéke

Def Az $f(x)$ fv határértéke az x_0 helyen a A szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$ ha $0 < |x - x_0| < \delta$.



Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

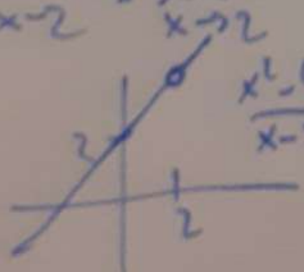
Megj. Az x_0-ban akkor is lehet határérték, ha ott nem értelmezett a fv.

Ekvivalens definíció: Az $f(x)$ fv x_0 helyen vett határértéke az A szám, ha minden olyan x_n sorozatra, melyre $x_n \in D_f$ és $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ teljesül, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Pl. 1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{3^2 - 4}{3 - 2} = 5$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{2^2 - 4}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$!!

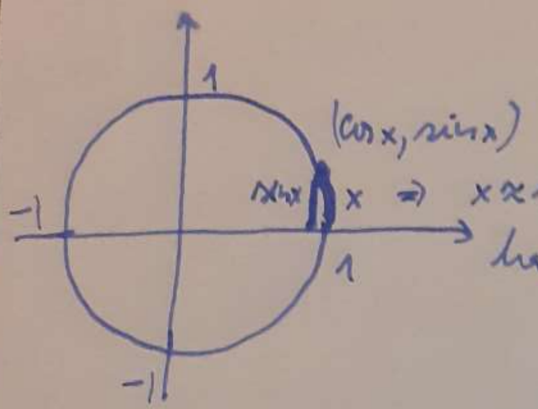
$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$



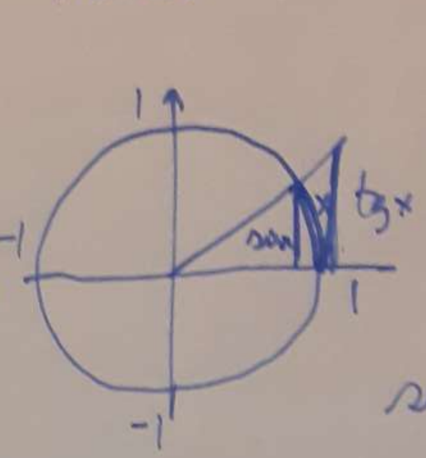
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

Tfh $x>0$

Precízen:



$\Rightarrow x \approx \sin x$, ha $x \approx 0$



$ter_{\Delta} < ter < ter_{\Delta}$

$\frac{1\cdot \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x \cdot 1}{2}$

$\sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow$

$\approx$

$\cos 0 = 1$

$\frac{\sin x}{x} \approx 1$ ha $x \approx 0, x>0$

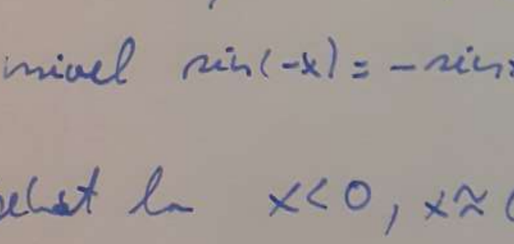
Ha $x<0$, $x \approx 0 \Rightarrow -x>0$, $-x \approx 0 \Rightarrow \frac{\sin(-x)}{-x} \approx 1$,

mivel $\sin(-x) = -\sin x$, ezért $1 \approx \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$,

tehát ha $x<0$, $x \approx 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \approx 1$.

Tehát ha $x \approx 0$, akkor $\frac{\sin x}{x} \approx 1$, így $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

<u>Def</u> Az $f(x)$ fv x_0-ban vett jobb oldali határértéke a J szám, ha minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $\delta>0$, hogy $x_0<x<x_0+\delta$ esetén $|f(x)-J|<\varepsilon$.

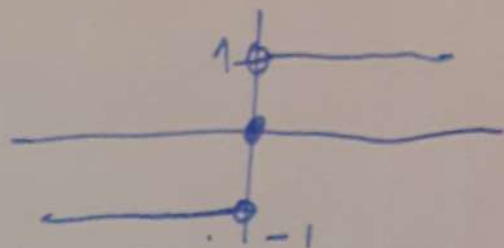


Jelölés: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = J$

<u>Def</u> Az $f(x)$ x_0-ban vett baloldali határértéke a B szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy $x_0 - \delta < x < x_0$ esetén $|f(x) - B| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = B$.

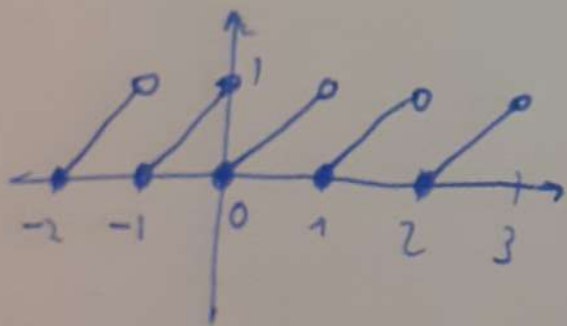
<u>Megj.</u> Az $f(x)$ fvnek x_0-ban pontosan akkor létezik határértéke, ha létezik bal- és jobboldali határértéke és ezek megegyeznek.

Pl. 1. $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0+} \mathrm{sgn}(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} \mathrm{sgn}(x) = -1$

2. $f(x) = \{x\}$ törtrész fv $\qquad \{2{,}6\} = 0{,}6 \qquad \{-0{,}6\} = 0{,}4$

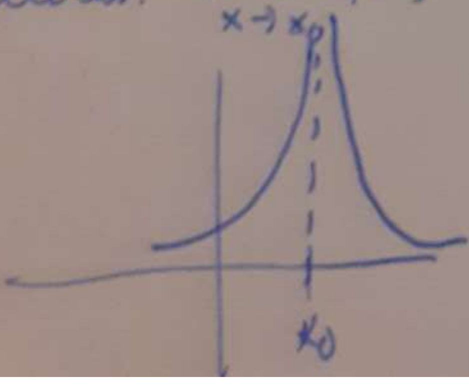


$\lim\limits_{x \to 0+} \mathrm{sgn}(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0-} \mathrm{sgn}(x) = 1$

<u>Def</u> Az $f(x)$ fvnek az x_0 helyen a $+\infty$ a határértéke, ha minden $K > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, ha $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) > K$.

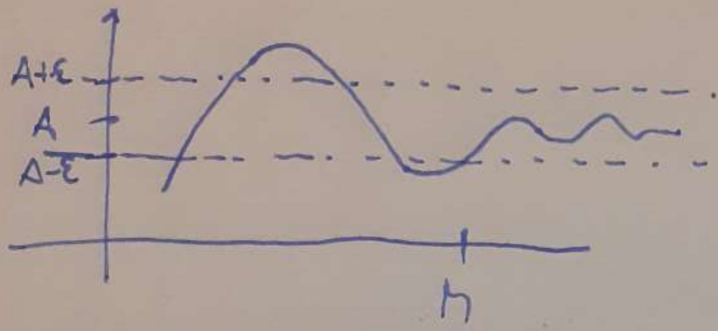
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



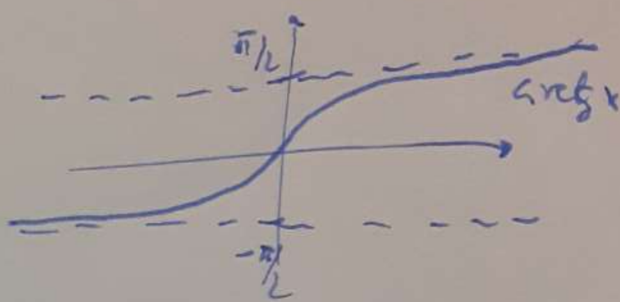
Pl. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

<u>Def</u> Az $f(x)$ fv $+\infty$ -ben vett határértéke a A szám, ha minden $\varepsilon>0$ esetén létezik M, hogy $x>M$ esetén $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$



Pl. 1.) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$



2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

<u>Nevezetes határértékek</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

<u>Biz</u>: Tudjuk: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, ezért $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e = 1$

De $1=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$x\to\infty \iff \frac{1}{x}\to 0+$. Legyen $y=\frac{1}{x}$. Így ...

Megmutatható: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y)}{y}=1\\ \lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\ln(1+y)}{y}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$

Legyen $y = e^x - 1$. Ha $x \approx 0$, akkor $y = e^x - 1 \approx e^0 - 1 = 0$.
$e^x = 1+y \Rightarrow x = \ln(1+y)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

3. Legyen $\mu \in \mathbb{R}$. Akkor $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu$.

Legyen $y = (1+x)^{\mu} - 1$. Akkor $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$

$y+1 = (1+x)^{\mu} \Rightarrow \ln(y+1) = \ln(1+x)^{\mu} = \mu \ln(1+x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y \cdot \mu \ln(1+x)}{x \ln(1+y)} =$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \mu \cdot \frac{\overbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}^{\approx 1}}{\underbrace{\frac{\ln(1+y)}{y}}_{\approx 1}} = \mu.$$

Folytonosság

Def Az $f(x)$ fv folytonos az x_0 helyen, ha

1., létezik $f(x_0)$

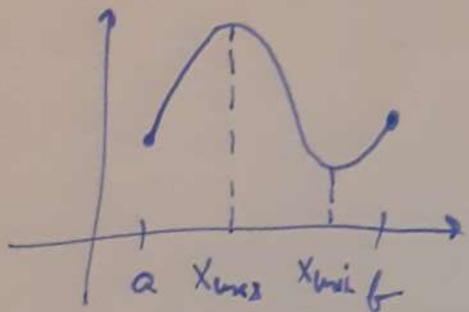
2., létezik $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

3., $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Def Az $f(x)$ fv folytonos, ha az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos

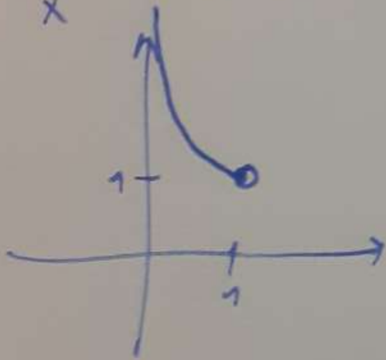
Pl. folytonos fvek: $x; x^2; x^3; x^n\ n \in \mathbb{Z}^+; \sin x; \cos x; e^x;$
$\operatorname{tg} x$, ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\ln x$, ha $x > 0$; $\sqrt{2x-1}$ ha $x > 1/2$

Tétel (Weierstrass) Zárt intervallumban folytonos fv korlátos és a fv ott felveszi a legkisebb és legnagyobb értékét.

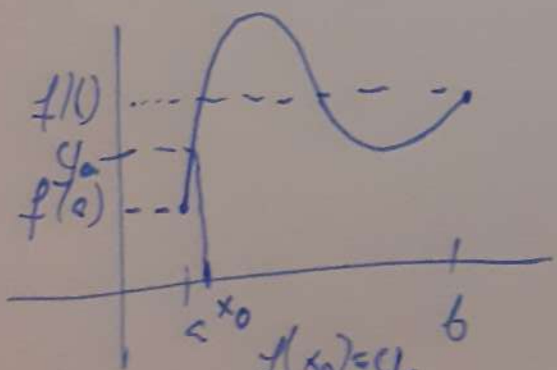


Megj. Ez nyílt intervallumban nem igaz:

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad 0<x<1$

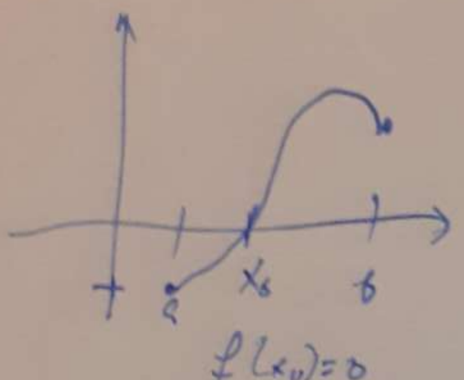


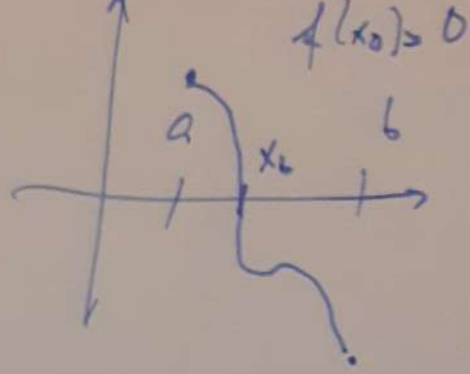
Tétel (Bolzano) Ha $f(x)$ folytonos $[a,b]$-ben, akkor $f(x)$ minden $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket felvesz $[a,b]$-ben.



$f(x_0)=y_0$

Köv 1. Ha $f(a)$ és $f(b)$ előjele különböző, akkor a folyt. $f(x)$-nek van gyöke $[a,b]$-ben





2. Ha $p(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\dots+a_1x+a_0$, $a_{2n+1}>0$, akkor $p(x)$-nek van gyöke

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\dots+a_0\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{x^{2n+1}}_{\to\infty}\Big(\underbrace{a_{2n+1}}_{>0}+\underbrace{\frac{a_{2n}}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{a_{2n-1}}{x^2}}_{\to 0}+\dots+\underbrace{\frac{a_0}{x^{2n+1}}}_{\to 0}\Big)=+\infty$$

$\Rightarrow$ létezik b, hogy $f(b)>0$

$$\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x^{2n+1}}_{\to-\infty}\cdot\Big(\underbrace{a_{2n+1}}_{>0}+\underbrace{\frac{a_{2n}}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{a_{2n-1}}{x^2}}_{\to 0}+\dots+\underbrace{\frac{a_0}{x^{2n+1}}}_{\to}\Big)=-\infty$$

$\Rightarrow$ létezik a, hogy $f(a)<0$

$f(a)<0$, $f(b)>0$, $f(x)$ folyt $\Rightarrow$ létezik x_0: $f(x_0)=0$