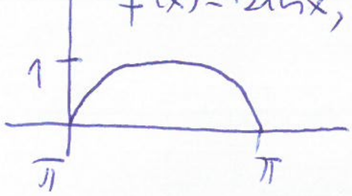
Pl. 1. $f(x)=\sin x, \quad 0\leq x\leq \pi$

16



$$m=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=-\overset{-1}{\cos\pi}-(-\overset{1}{\cos 0})=2$$

$$m_y=\int_0^{\pi}\underset{u}{x}\,\underset{v'}{\sin x}\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x\,dx=-\pi\cos\pi-(-0\cdot\cos 0)+$$

$$+\Big(\sin x\Big]_0^{\pi}=\pi+\sin\pi-\sin 0=\pi$$

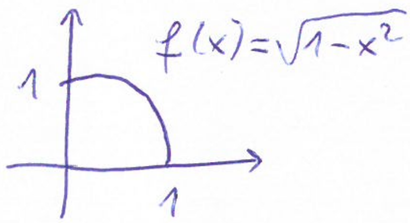
$u'=1 \quad v=-\cos x$

$$m_x=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2x\,dx=$$

$$\Big[\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\pi}=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{4}\,\frac{\sin 2\pi}{2}-\Big(\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 0}{2}\Big)=\frac{\pi}{4}$$

$$S=\Big(\frac{m_y}{m},\ \frac{m_x}{m}\Big)=\Big(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi/4}{2}\Big)=\Big(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}\Big)$$

2. Negyedkör



$$m=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\text{terület}=\frac{\pi}{4}$$

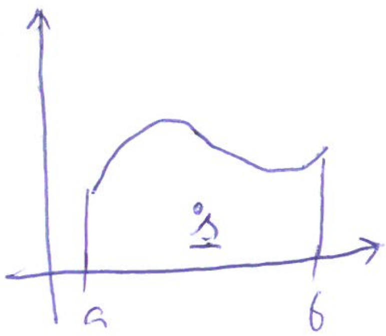
$$m_y=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1-\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{1/2}\,dx=\Big[-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\Big]_0^1=$$

$$-\frac{(1-1^2)^{3/2}}{3}-\Big(-\frac{(1-0^2)^{3/2}}{3}\Big)=\frac{1}{3}$$

$$m_x=\int_0^1\frac{1}{2}\Big(\sqrt{1-x^2}\Big)^2dx=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x^2)\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\,dx=\Big[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=$$

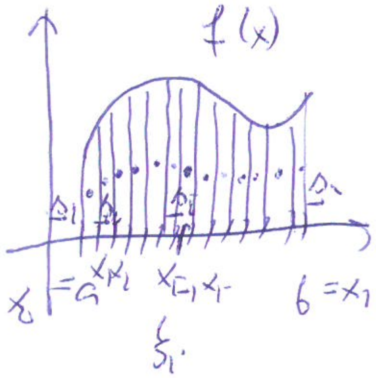
$$\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1^3}{3}-\Big(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot\frac{0^3}{3}\Big)=\frac{1}{3}$$

$$S=\Big(\frac{m_y}{m},\ \frac{m_x}{m}\Big)=\Big(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}},\ \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}}\Big)=\Big(\frac{4}{3\pi},\ \frac{4}{3\pi}\Big)$$



Az $[a,b]$ intervallumot az $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ osztópontokkal n intervallumra bontja, ami a lemezt is n db vékony csíkra bontja.

Feltételezzük: sűrűségfv: $\rho = 1$, azaz a tömeg egyenlő a területtel.



$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$\underline{s}_i \approx \left(\xi_i, \frac{f(\xi_i)}{2}\right)$, az i-edik

sáv tömege $\approx f(\xi_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i} = f(\xi_i)\Delta x_i$

$$\underline{s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{s}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \left(\xi_i, \frac{f(\xi_i)}{2}\right)}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i, \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i} =$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i, \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i} \approx \frac{\left(\int_a^b x f(x)dx, \int_a^b \frac{1}{2} f^2(x)dx\right)}{\int_a^b f(x)dx}$$

y tengelyre vett nyomaték: $m_y = \int_a^b x f(x)dx$

x — " — : $m_x = \int_a^b \frac{1}{2} f^2(x)dx$

tömeg: $m = \int_a^b f(x)dx$

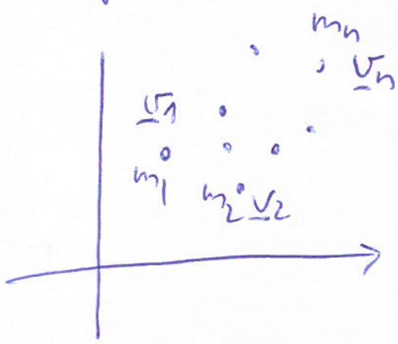
Súlypont: $\underline{s} = \left(\frac{m_y}{m}, \frac{m_x}{m}\right)$

Mérnöki alkalmazás: vékony, homogén lemez súlypontja

Feladat: Legyen $f(x)>0$, $a\le x\le b$. Határozza meg az $f(x)$ fv grafikonja és az x tengely közötti vékony homogén lemez súlypontját!

Súlypont tulajdonságai:

1. Tömegpontrendszer súlypontja



Ha a $\underline{v}_1=(x_1,y_1)$ pontban m_1 tömegű tömegpont

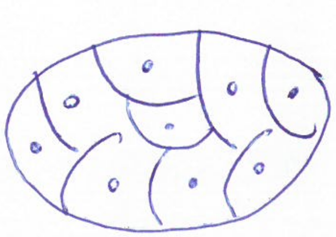
— " — $\underline{v}_2=(x_2,y_2)$ — " — m_2 — " —

⋮

— " — $\underline{v}_n=(x_n,y_n)$ — " — m_n — " — ,

van, akkor ennek súlypontja: $\underline{s}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot \underline{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

2. Egy test súlypontját úgy számolhatjuk, hogy részekre bontjuk és egy részt helyettesítjük a rész súlypontjában lévő megfelelő súlyú tömegponttal és ebből számoljuk a súlypontot.

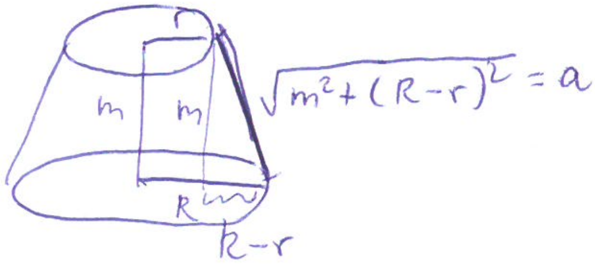


$$f'(x) = \frac{R-r}{m}$$

$$A = 2\pi \int_0^m \left(\frac{R-r}{m}x + r\right)\sqrt{1+\left(\frac{R-r}{m}\right)^2}\,dx = 2\pi\sqrt{\frac{m^2+(R-r)^2}{m^2}}\left[\frac{\frac{\left(\frac{R-r}{m}x+r\right)^2}{2}}{\frac{R-r}{m}}\right]_0^m$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{m^2+(R-r)^2}}{m}\,\frac{m}{2(R-r)}\left(\left(\frac{R-\cancel{r}}{\cancel{m}}\cdot\cancel{m}+\cancel{r}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{\cancel{m}}\cdot 0 + r\right)^2\right) =$$

$$\cancel{2}\pi\sqrt{m^2+(R-r)^2}\cdot\frac{R^2-r^2}{\cancel{2}(R-r)} = \pi\sqrt{m^2+(R-r)^2}\,(R+r).$$



3. Tórusz felszíne: $f_1(x) = R+\sqrt{r^2-x^2}$, $f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

$f_2(x) = R-\sqrt{r^2-x^2}$, $f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

$$A = 2\pi\int_{-r}^{r}\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx +$$

$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$2\pi\int_{-r}^{r}2R\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi Rr\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi Rr\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)}}\,dx =$$

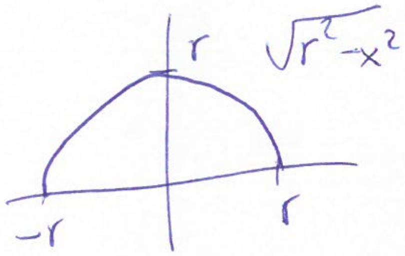
$$4\pi Rr\int_{-r}^{r}\frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,dx = \frac{4\pi Rr}{r}\left[\frac{\arcsin\frac{x}{r}}{\frac{1}{r}}\right]_{-r}^{r} =$$

$$4\pi Rr\left(\underbrace{\arcsin 1}_{\pi/2} - \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\pi/2}\right) = 4\pi^2 Rr = (2\pi R)(2\pi r).$$

(Ezt precízen az improprius integrálnál látjuk meg)

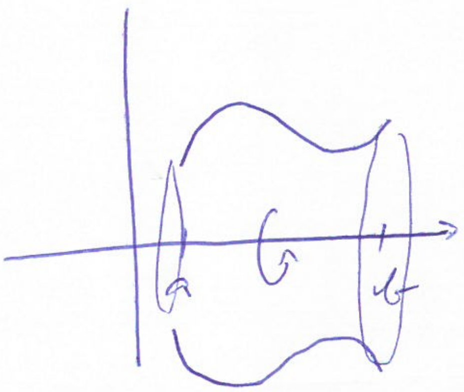
$$= \pi \int_{-r}^{r} \underbrace{\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2}_{R^2+r^2-x^2+2R\sqrt{r^2-x^2}} - \underbrace{\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2}_{R^2+r^2-x^2-2R\sqrt{r^2-x^2}} dx =$$

$$\pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2-x^2}\, dx = 4R\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx = 4R\pi \cdot \frac{r^2\pi}{2} = 2\pi^2 r^2 R = (r^2\pi)(2R\pi)$$



$$\text{ter} = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx = \frac{r^2\pi}{2}$$

IV Forgástest felszíne



Palást felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

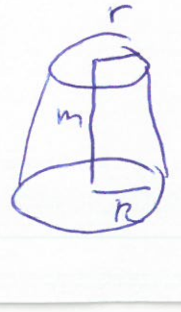
1. R sugarú gömb felszíne: $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R \leq x \leq R$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(R^2-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$A = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} \underbrace{\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} dx =$$

$$1+\frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2}$$

$$2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 2\pi \left[Rx\right]_{-R}^{R} = 2\pi\left(R^2-(-R^2)\right) = 4\pi R^2$$

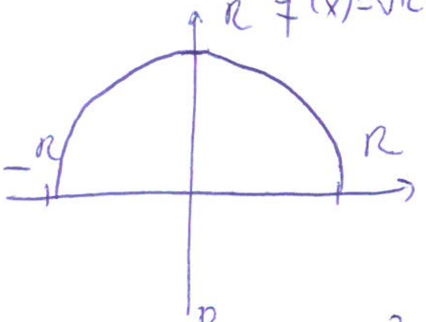
2. 

Csonkakúp felszínének palástja:

$$f(x) = \frac{R-r}{m}x + r, \quad 0 \leq x \leq m.$$

Pl. 1. R sugarú gömb térfogata

$f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ $\quad x^2+y^2=R^2$



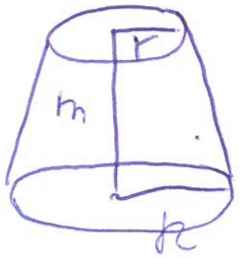
$y^2=R^2-x^2$

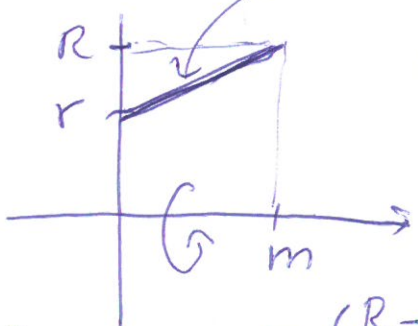
$y=\sqrt{R^2-x^2}$

$$V=\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-R}^{R}R^2-x^2\,dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{x=R}=$$

$$\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}-\left(-R^3-\frac{(-R)^3}{3}\right)\right)=\frac{4R^3\pi}{3}$$

2. Csonkakúp térfogata





meredekség $=\frac{R-r}{m}$

$f(x)=\frac{R-r}{m}x+r$

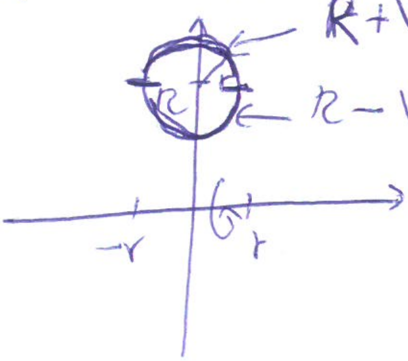
$0\le x\le m$

$$V=\pi\int_0^m\left(\frac{R-r}{m}x+r\right)^2dx=\pi\left[\frac{\frac{\left(\frac{R-r}{m}x+r\right)^3}{3}}{\frac{R-r}{m}}\right]_0^m=$$

$$\frac{\pi m}{3(R-r)}\left(\left(\frac{R-r}{\cancel{m}}\cdot\cancel{m}+r\right)^3-\left(\frac{R-r}{m}\cdot 0+r\right)^3\right)=\frac{\pi m\left(R^3-r^3\right)}{3(R-r)}=$$

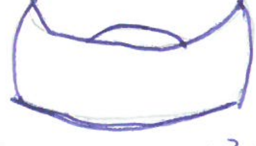
$$\frac{\pi m(R-r)\left(R^2+Rr+r^2\right)}{3(R-r)}=\frac{\pi m\left(R^2+Rr+r^2\right)}{3}$$

3. Tórusz



$R+\sqrt{r^2-x^2}$

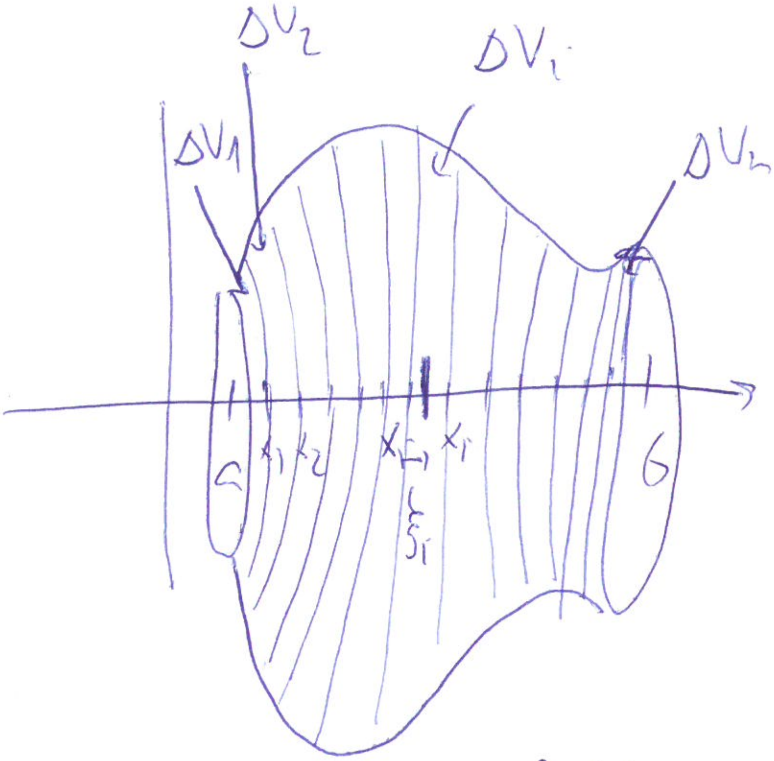
$R-\sqrt{r^2-x^2}$



$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx-$$

$$\pi\int_{-r}^{r}\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=$$

Osszuk fel az $[a,b]$ zárt intervallumot n db kisebb intervallumra az $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ osztópontok segítségével. Ezek az osztópontok a forgástestet n db vékony, majdnem henger alakú forgástestre bontják:



$V=\Delta V_1+\Delta V_2+\ldots+\Delta V_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$

A ΔV_i térfogat folytonos $f(x)$ esetén jól közelíthető egy $f(\xi_i)$ sugarú, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ magasságú henger térfogatával, ahol $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. Tehát $\Delta V_i\approx f^2(\xi_i)\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{\Delta x_i}\pi$,

azaz $\Delta V_i\approx\pi f(\xi_i)^2\Delta x_i$, tehát

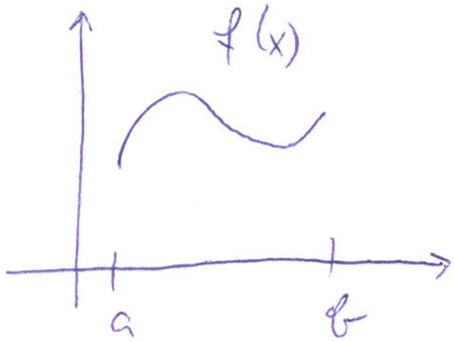
$$V\approx\sum_{i=1}^{n}\pi f(\xi_i)^2\Delta x_i\approx\int_a^b\pi f^2(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Így azt kapjuk, hogy

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

II. Síkgörbe ívhossza

$y = f(x)$



$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Pl. 1. $f(x) = \operatorname{ch} x, \quad -\ln 2 \leq x \leq \ln 2, \quad f'(x) = \operatorname{sh} x$

$$s = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \operatorname{ch} x\,dx$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$$

$$= \left[\operatorname{sh} x\right]_{-\ln 2}^{\ln 2} = \operatorname{sh}(\ln 2) - \operatorname{sh}(-\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} - \frac{e^{-\ln 2} - e^{-(-\ln 2)}}{2}$$

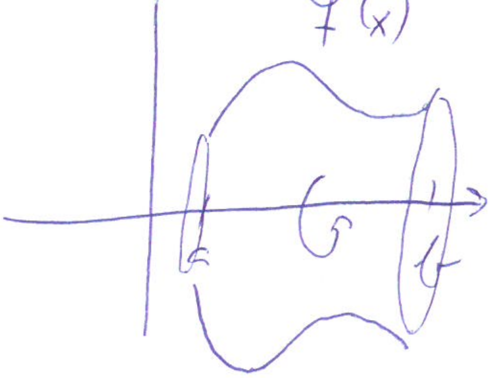
$$= \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{2} - 2}{2} = \frac{3}{2}$$

2. $y = 2x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1$

$y' = 3x^{1/2}$

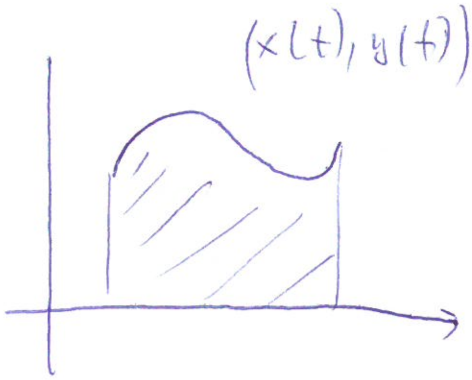
$$s = \int_0^1 \sqrt{1+9x}\,dx = \left[\frac{\frac{(1+9x)^{3/2}}{3/2}}{9}\right]_0^1 = \frac{2}{27}\left(10^{3/2} - 1\right)$$

III. Forgástest térfogata



Legyen $f(x) > 0$ ha $a \leq x \leq b$; forgassuk meg $f(x)$ grafikonját az x tengely körül. Határozzuk meg az így kapott forgástest térfogatát!

4. Paraméteresen adott görbe alatti terület

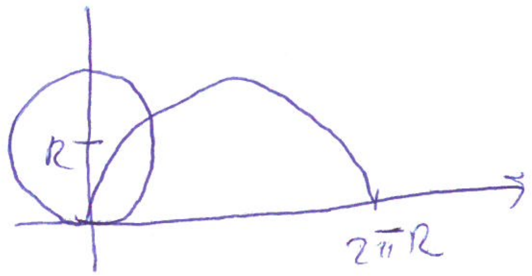


$\alpha \le t \le \beta$, $y(t) > 0$

Ha $x(t)$ monoton nő: $ter = \int_\alpha^\beta \dot{x}(t) y(t)\,dt$

csökken: $ter = -\int_\alpha^\beta \dot{x}(t) y(t)\,dt$.

Pl. 1. Ciklois



$x = x(t) = R(t - \sin t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$y = y(t) = R(1 - \cos t)$

$x(t)$ monoton nő, $\dot{x} = \dot{x}(t) = R(1 - \cos t)$.

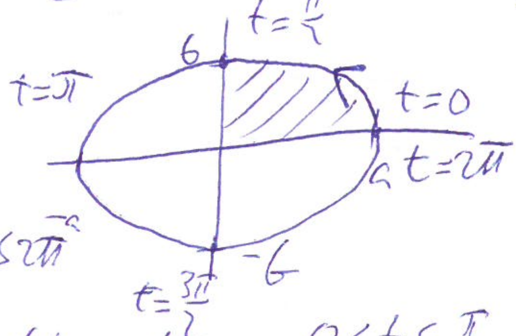
$$ter = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t) R(1-\cos t)\,dt = R^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t}_{\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\,dt = R^2\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$R^2\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi - 2\cdot\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi - \left(\frac{3}{2}\cdot 0 - 2\sin 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right)\right) = 3R^2\pi$$

2. Ellipszis: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a > 0, b > 0$



$x = a\cos t$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$y = b\sin t$

$x(t) = a\cos t$ monoton csökken, ha $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, mert

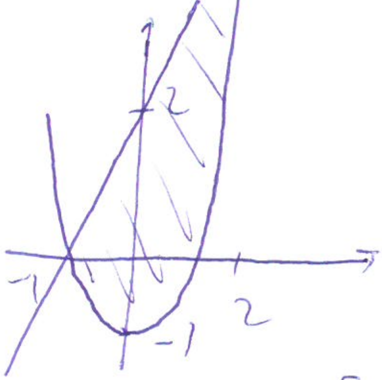
$\dot{x} = -a\sin t$

$$ter = ter = 4\left(-\int_0^{\pi/2} (-a\sin t)\, b\sin t\,dt\right) = 4ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt =$$

$$4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\,dt = 4ab\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 4ab\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot\sin 0 - \left(0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)\right) = ab\pi.$$

Pl. 1. $f_1(x) = 2x+2$, $f_2(x) = x^2-1$: $\quad 2x+2 = x^2-1$



~~ter~~ =

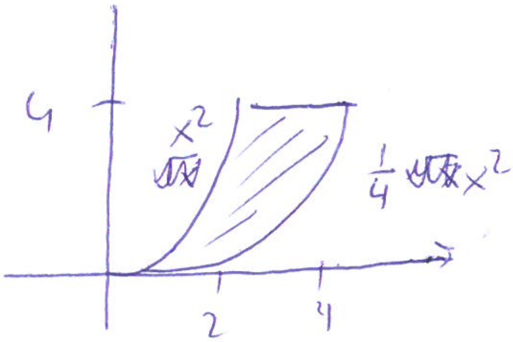
$$x^2-2x-3=0$$

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \quad \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

$$ter = \int_{-1}^{2} \underbrace{2x+2-(x^2-1)}_{2x+3-x^2}\,dx =$$

$$\left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 4+6-\frac{8}{3}-\left(1-3-\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = 9$$

2.

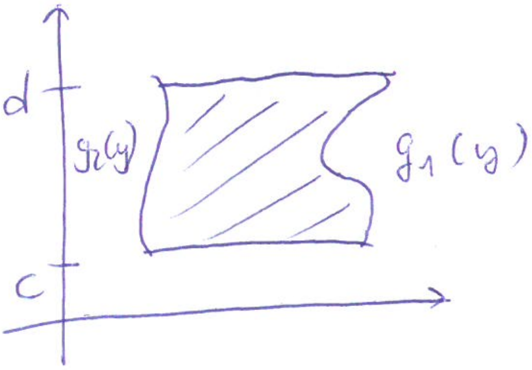


$$ter = \int_0^2 \underbrace{x^2-\frac{1}{4}x^2}_{\frac{3}{4}x^2}\,dx + \int_2^4 4-\frac{1}{4}x^2\,dx =$$

$$\left[\frac{\cancel{3}}{4}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^2 + \left[4x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_2^4 =$$

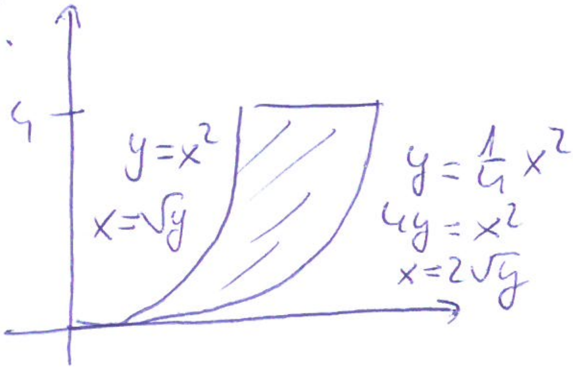
$$\frac{8}{4}-\frac{0}{4}+\left(16-\frac{64}{12}-\left(8-\frac{8}{12}\right)\right) = \frac{16}{3}$$

3.



$$ter = \int_c^d g_1(y)-g_2(y)\,dy$$

Pl.



$$ter = \int_0^4 2\sqrt{y}-\sqrt{y}\,dy = \left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} = \frac{16}{3}$$

Pl. 1. $f(x)=x^2$, $0\le x\le 1$: $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3}$

2. $\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^3 x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x - \cos x \cdot \sin^2 x\, dx = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} =$

$\cos x \cdot \cos^2 x = \cos x\,(1-\sin^2 x)$

$\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\sin^3\frac{\pi}{2}}{3} - \left(\sin 0 - \frac{\sin^3 0}{3}\right) = \frac{2}{3}$

3. $\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - \left[e^x\right]_0^1 =$

$u\ v'$

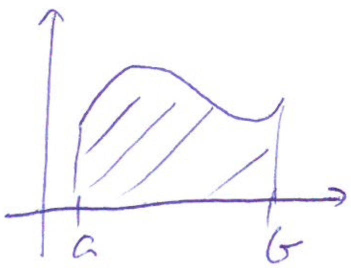
$u'=1 \quad v=e^x$

$e-(e^1-e^0)=1$

Határozott integrál alkalmazásai

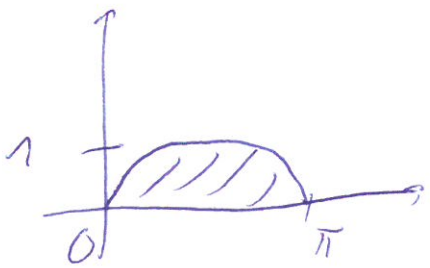
I. Területszámítás

1.) $f(x)\ge 0$, $a\le x\le b$



$\text{ter} = \int_a^b f(x)\,dx$

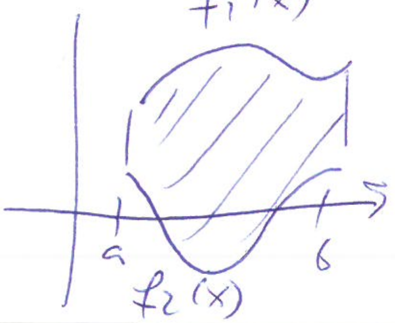
Pl. $f(x)=\sin x$, $0\le x\le \pi$



$\text{ter} = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} =$

$-\underbrace{\cos\pi}_{-1} - (-\underbrace{\cos 0}_{1}) = 2$

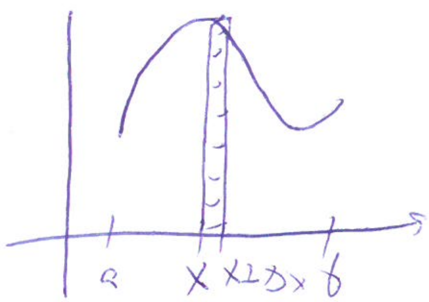
2.)



$\text{ter} = \int_a^b f_1(x) - f_2(x)\,dx =$

$\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx$

Ha $f(x)$ folytonos fv, akkor az előzőek érvényesek



$\approx f(x)\cdot \Delta x$.

Tehát $T(x+\Delta x) - T(x) \approx f(x)\Delta x$,

azaz $f(x) \approx \dfrac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x}$

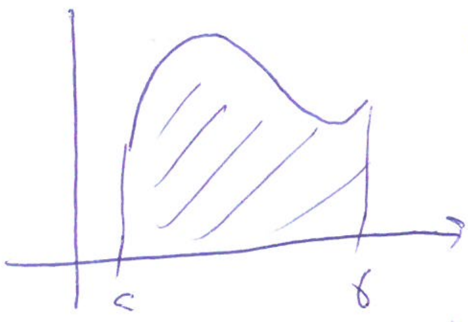
Pontosan: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x} = f(x)$.

Másrészt: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x} = T'(x)$.

Tehát $T(x)$ az $f(x)$ egy primitív fve. Ekkor ha $F(x)$ az $f(x)$ egy primitív fv, akkor létezik $c \in \mathbb{R}$, hogy $T(x) = F(x) + c$. $c = ?$

Tudjuk $T(a) = 0 = F(a) + c$, ezért $c = -F(a)$.

Így $T(x) = F(x) - F(a)$



$$\text{ter} = \int_a^b f(x)\,dx = T(b) = F(b) - F(a).$$

Newton–Leibniz tétel (Az integrálszámítás alaptétele)

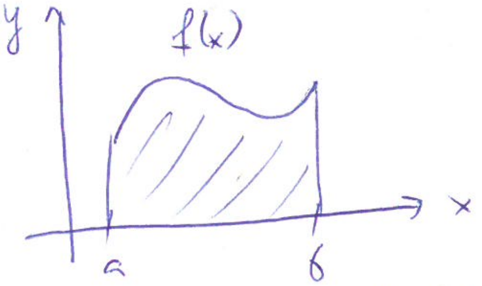
Legyen $f(x)$ egy folytonos fv $[a,b]$-ben. Ha $F(x)$ az $f(x)$ egy primitív fve, ~~fv~~ akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Tétel Ha $f(x)$ folytonos vagy (korlátos és véges sok pont kivételével folytonos) az $[a,b]$ zárt intervallumban, akkor ott létezik a határozott integrálja.

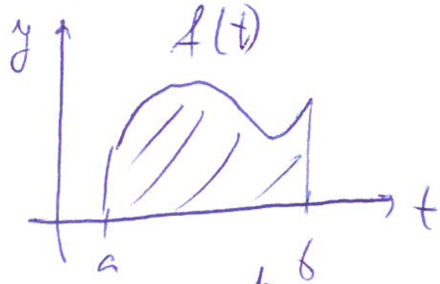
Hogyan számítható ki folytonos $f(x)$ esetén az $\int_a^b f(x)dx$?

Ha az f fv változója x, akkor



előjeles terület $= \int_a^b f(x)dx$

Ha az f fv változója t, akkor

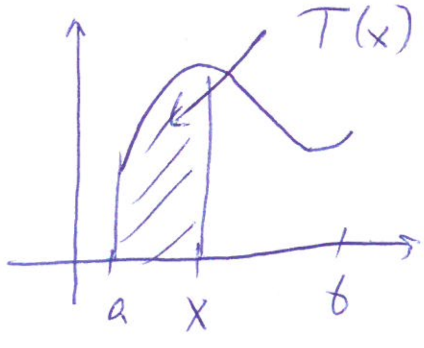


előjeles terület $= \int_a^b f(t)dt$.

Tehát $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt \left(= \int_a^b f(u)du = \dots\right)$

Legyen $a \le x \le b$, $T(x) = \int_a^x f(t)dt$

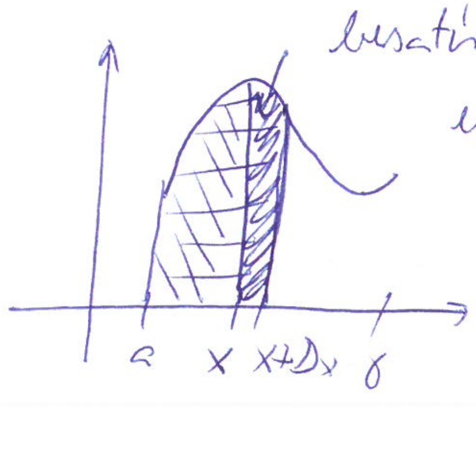
T(x) ennek az előjeles területe



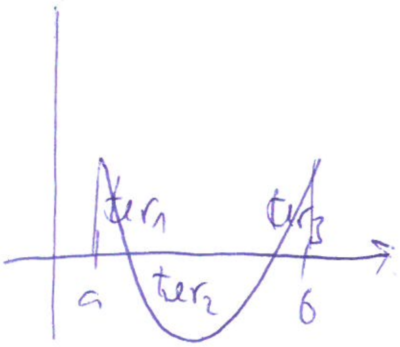
Tfh. Legyen $\Delta x > 0$.

$T(x+\Delta x) - T(x)$:

$T(x+\Delta x) - T(x)$ a besatírozott sáv előjeles területe

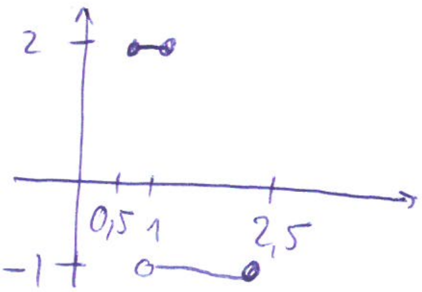


Megj: A határozott integrál az $f(x)$, $a \le x \le b$ fv grafikonja és az x tengely közötti előjeles területet adja meg, azaz ami az x tengely felett van, azt $\oplus$-nal, ami alatta azt $\ominus$-nal veszi figyelembe.



$$\int_a^b f(x)\,dx = ter_1 - ter_2 + ter_3$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0{,}5 \le x \le 1 \\ -1, & \text{ha } 1 < x \le 2{,}5 \end{cases}$$



$$\int_{0,5}^{2,5} f(x)\,dx = 2\cdot(1-0{,}5) + (-1)(2{,}5-1) =$$
$$1 - 1{,}5 = -0{,}5$$

A határozott integrál tulajdonságai:

1.) minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

2.) ha $\int_a^b f(x)\,dx$ és $\int_a^b g(x)\,dx$ léteznek, akkor $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx$ is létezik és $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

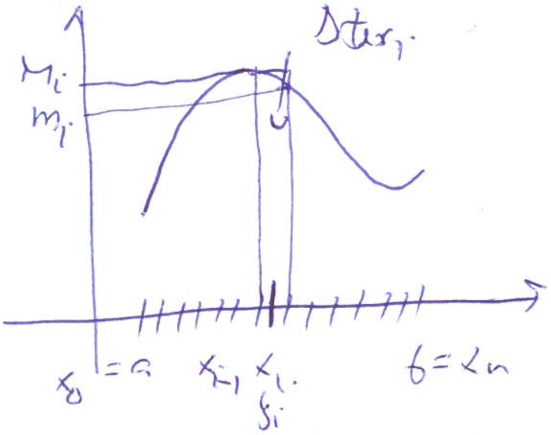
3.) ha $\int_a^b f(x)\,dx$ létezik és $a < c < b$, akkor $\int_a^c f(x)\,dx$ és $\int_c^b f(x)\,dx$ határozott integrálok is léteznek és

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ekkor $f(x)$, $a \le x \le b$ fv grafikonja alatti terület:

$$tér = \Delta tér_1 + \Delta tér_2 + \dots + \Delta tér_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta tér_i$$

Legyen az $[x_{i-1}, x_i]$ zárt intervallumban az $f(x)$ legnagyobb értéke M_i és legkisebb értéke m_i.



Ekkor

$$m_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i} \le \Delta tér_i \le M_i (x_i - x_{i-1})$$

Ha $f(x)$ folytonos és $\Delta x_i \approx 0$, akkor $m_i \approx M_i$ és $f(\xi_i) \approx m_i \approx M_i$, ezért $\Delta tér_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$, tehát

$$tér \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

<u>Def</u> Az $f(x)$, $a \le x \le b$ fv határozott integrálja vagy Riemann-integrálja a fenti jelölésekkel a

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0 \\ 1 \le i \le n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

véges határérték, ha ez létezik és független az x_i-k és ξ_i-k választásától.

Jelölés: $\int_a^b f(x)\,dx$.

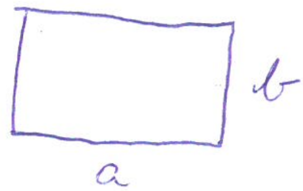
Tehát $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \approx \int_a^b f(x)\,dx$

Határozott integrál

Kérdés: Hogyan értelmezzük az $f(x)>0$, $a\le x\le b$ fv grafikonja alatti területet?

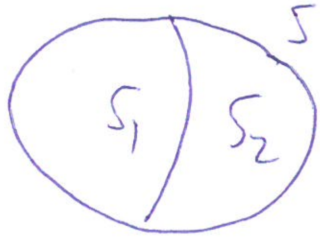
A terület tulajdonságai:

1.) A a és b oldalú téglalap területe:



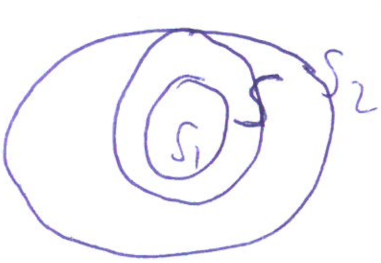
$ter = a\cdot b$

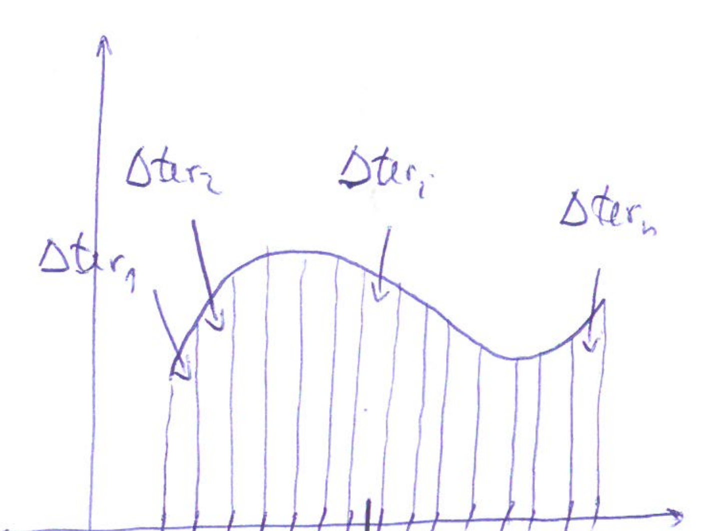
2. Ha $S=S_1\cup S_2$, $S_1\cap S_2=\emptyset$, akkor



$ter(S)=ter(S_1)+ter(S_2)$

3.) Ha $S_1\subset S\subset S_2$, akkor $ter(S_1)\le ter(S)\le ter(S_2)$.





Az $[a,b]$ intervallumot felosztjuk az $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_i<\dots<x_n=b$ osztópontok segítségével n db kis intervallumra.

Legyen $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.