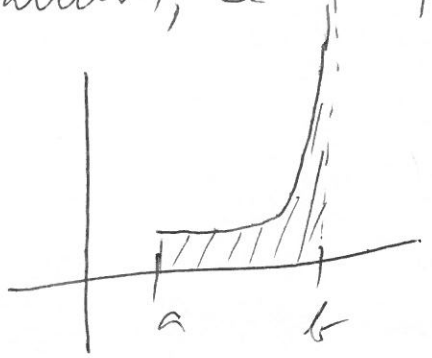
# Improprius integrál

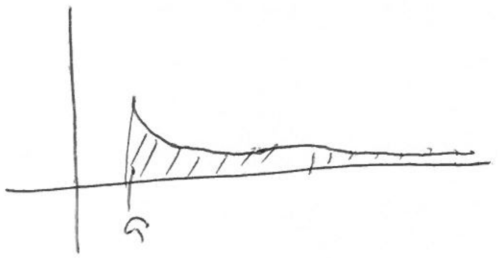
Feladat: Ha $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkbeli tartomány egy végtelen kiterjedésű tartomány, akkor szeretnénk annak a területét értelmezni.

Két alapeset:

1. Az $f(x)$ fv értelmezési tartománya egy intervallum, de a fv nem korlátos ott:



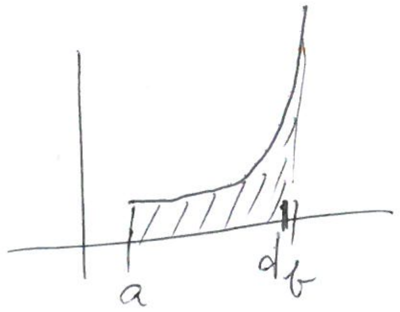
2. Az $f(x)$ fv értelmezési tartománya egy félegyenes vagy a teljes valós egyenes:



## I. típusú improprius integrál

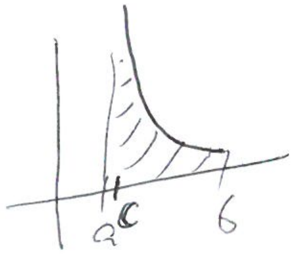
**Def 1.** Tfh $f(x)$ fv olyan, hogy minden $a<d<b$ esetén létezik az $\int_a^d f(x)dx$ határozott integrál, de $f(x)$ nem korlátos, ha $x \to b-$. Akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to b-} \int_a^d f(x)dx,$$ ha ez létezik



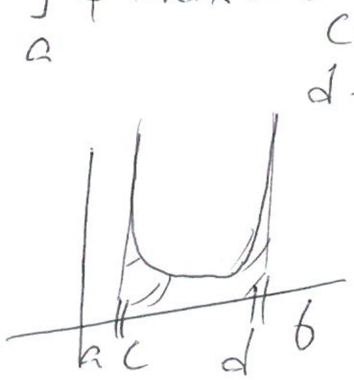

2. Tfh $f(x)$ fv olyan, hogy minden $a<c<b$ esetén létezik az $\int_c^b f(x)\,dx$ határozott integrál, de $f(x)$ nem korlátos ha $x \to a+$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,dx.$$



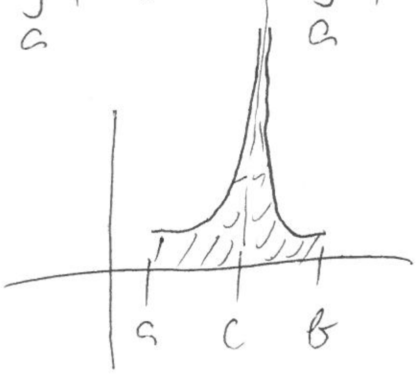

3. Tfh $f(x)$ fv olyan, hogy minden $a<c<d<b$ esetén létezik az $\int_c^d f(x)\,dx$ határozott integrál, de $f(x)$ nem korlátos ha $x \to a+$ vagy $x \to b-$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to a+ \\ d \to b-}} \int_c^d f(x)\,dx.$$




4. Tfh $f(x)$ fv olyan, hogy $a<c<b$ esetén $f(x)$ nem korlátos ha $x \to c$, de létezik az $\int_a^c f(x)\,dx$ és $\int_c^b f(x)\,dx$ improprius integrálok. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$




Ha fenti határértékek valós számot ad, akkor az improprius integrált konvergensnek, ha nem, akkor divergensnek mondjuk.

Pl. 1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} 2-2\sqrt{c} = 2.$ konv

2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[\ln x\right]_c^2 = \lim_{c\to 0^+} \ln 2 - \ln c = +\infty$ div

3. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[x\ln x - x\right]_1^c =$

$\displaystyle\int \ln x\,dx = \int \underset{v'}{1}\cdot\underset{u}{\ln x}\,dx = x\ln x - \int \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{1}\,dx = x\ln x - x + C$

$v = x \quad u' = \frac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{c\to 0^+} \underbrace{1\ln 1}_{0} - 1 - (\underbrace{c\ln c}_{\to 0} - \underbrace{c}_{\to 0}) = -1$ konv

$\displaystyle\lim_{c\to 0^+} c\ln c = \lim_{c\to 0^+}\frac{\ln c}{\frac{1}{c}} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{c\to 0^+}\frac{\frac{1}{c}}{-\frac{1}{c^2}} = \lim_{c\to 0^+} -c = 0$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \lim_{d\to -1^-}\int_{-2}^{d}\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}}_{(x+1)^{-1/3}}\,dx = \lim_{d\to -1^-}\left[\frac{(x+1)^{2/3}}{2/3}\right]_{-2}^{d} =$

$\displaystyle= \lim_{d\to -1^-}\frac{3}{2}\underbrace{(d+1)^{2/3}}_{\to 0} - \frac{3}{2}\underbrace{(-2+1)^{2/3}}_{1} = -\frac{3}{2}$ konv

5.) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\substack{c\to -1+\\ d\to 1-}} \int_c^d \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\substack{c\to -1+\\ d\to 1-}} [\arcsin x]_c^d =$ (4.)

$\lim_{\substack{c\to -1+\\ d\to 1-}} \arcsin d - \arcsin c = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ konv

6.) $\int_0^9 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx + \int_1^9 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx =$

$\lim_{d\to 1-} \int_0^d (x-1)^{-2/3}dx + \lim_{c\to 1+} \int_c^9 (x-1)^{-2/3}dx =$

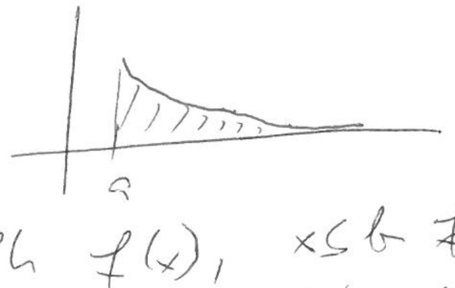
$\lim_{d\to 1^-} \left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_0^d + \lim_{c\to 1+} \left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_c^9 =$

$\lim_{d\to 1^-} \left(3\underbrace{(d-1)^{1/3}}_{\downarrow\, 0} - 3\underbrace{(0-1)^{1/3}}_{-1}\right) + \lim_{c\to 1+} \left(3\underbrace{(9-1)^{1/3}}_{2} - 3\underbrace{(c-1)^{1/3}}_{\downarrow\, 0}\right) = 9$ konv.

II. típusú impropriús integrál

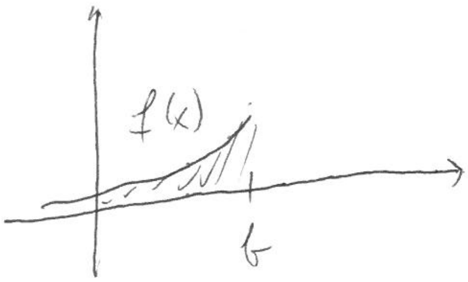
Def 1. Tfh $f(x)$, $x \geq a$ fv olyan, hogy minden $d > a$ esetén létezik az $\int_a^d f(x)dx$. Ekkor

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{d\to +\infty} \int_a^d f(x)dx.$$



2. Tfh $f(x)$, $x \leq b$ ~~tetsz.~~ fv olyan, hogy minden $c < b$ esetén létezik az $\int_c^b f(x)dx$. Ekkor

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to -\infty} \int_c^b f(x)dx.$$




3. Tfh. f(x) fv olyan, hogy minden $c<d$ esetén létezik az $\int_c^d f(x)dx$ határozott integrál. Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{c\to-\infty \\ d\to+\infty}} \int_c^d f(x)dx.$$

Ha a fenti határérték valós szám, akkor az improprius integrált konvergensnek mondjuk.

Megj: Ha $f(x)>0$, akkor az improprius integrál az f(x) grafikonja alatti területet adja meg.

Pl. 1. $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b =$

konv

$\lim_{b\to+\infty} -\underbrace{e^{-b}}_{\downarrow 0} - (-e^{-0}) = 1$

2. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2-1}dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_2^b =$

$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}$

$\left.\begin{aligned} x:&\ A+B=0 \\ \text{konst}:&\ A-B=1 \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} 2A=1 \Rightarrow A=1/2$

$B=-1/2$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{2}\ln|b-1| - \frac{1}{2}\ln|b+1|}_{\frac{1}{2}\left(\ln|b-1|-\ln|b+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{|b-1|}{|b+1|}} - \left( \frac{1}{2}\underbrace{\ln|2-1|}_{0} - \frac{1}{2}\ln|2+1| \right) \right) \quad (6)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\Big|\underbrace{\frac{b-1}{b+1}}_{1}\Big| + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 3 \quad \text{konv.}$$

3. $$\int_{-\infty}^{1} x e^x\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^1 x e^x\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left[x e^x - e^x\right]_c^1 =$$

$$\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^x}\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C$$

$u' = 1 \quad v = e^x$

$$\lim_{c\to-\infty} 1e^1 - e^1 - (\overset{\to 0}{c e^c} - \overset{\to 0}{e^c}) = e - e = 0 \quad \text{konv.}$$

$$\lim_{c\to-\infty} c e^c = \lim_{c\to-\infty}\frac{c}{e^{-c}} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{c\to-\infty}\frac{1}{-e^{-c}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

4. $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+4x^2}\,dx = \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}}\int_c^d \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}}\left[\frac{\operatorname{arctg} 2x}{2}\right]_c^d =$$

$$\lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}} \frac{\operatorname{arctg} 2d}{2} - \frac{\operatorname{arctg} 2c}{2} = \frac{\pi/2}{2} - \frac{-\pi/2}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{konv.}$$

5. p-szabály:

Legyen $p\in\mathbb{R}$. Ekkor $$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{konv ha } p>1 \\ \text{div} & \text{ha } p\le 1. \end{cases}$$

Ha $p > 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{d\to+\infty} \int_1^d x^{-p}dx = \lim_{d\to+\infty}\left[\frac{x^{\overset{<0}{1-p}}}{1-p}\right]_1^d =$$

$$\lim_{d\to\infty} \frac{d^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p} = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$ konv

Ha $p = 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{d\to+\infty} \int_1^d \frac{1}{x}dx = \lim_{d\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^d = \lim_{d\to+\infty} \ln d - \ln 1 = +\infty$$ div

Ha $p < 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{d\to+\infty} \int_1^d x^{-p}dx = \lim_{d\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^d = \lim_{d\to+\infty} \frac{d^{\overset{>0}{1-p}}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p}$$

$= +\infty$

div