Komplex számok

A valós számok körében az $x^2=-1$ egyenletnek nincs megoldása.
Jelölje „i" azt a számot, melyre teljesül, hogy $i^2=-1$.
Ez az i egy új, nem valós szám.
Legyen $a,b\in\mathbb{R}$. A $z=a+bi$ alakú számokat komplex számoknak hívjuk. A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.

Pl. $z=5+2i$

$z=a+bi$; a: valós rész
b: képzetes rész

A $z=a+bi$ alakban megadott komplex számot a komplex szám algebrai alakjának hívjuk.

$z=4-3i$; $a=4$, $b=-3$

A $z=a+bi$ komplex szám konjugáltja: $\bar{z}=a-bi$

Pl. $z=9+2i$, $\bar{z}=9-2i$

Műveletek komplex számokkal

$z_1=a_1+b_1i$; $z_2=a_2+b_2i$

$z_1+z_2=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

$z_1-z_2=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

$$z_1z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2\overset{-1}{i^2}=$$
$$a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

Pl. $z_1=4+3i$, $z_2=8-5i$

$z_1+z_2=(4+3i)+(8-5i)=12-2i$

$z_1-z_2=(4+3i)-(8-5i)=-4+8i$

$z_1 z_2=(4+3i)(8-5i)=32-20i+24i-15\underset{}{\overset{-1}{i^2}}=47+4i$

$\frac{z_1}{z_2}$ = algebrai alakban?

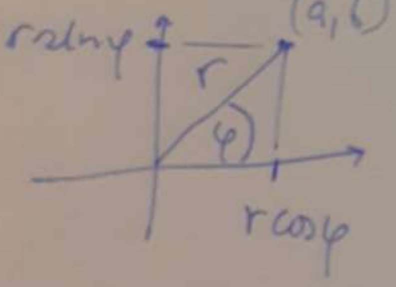
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}=\frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)}=\frac{a_1a_2-a_1b_2 i+a_2b_1 i-b_1b_2\overset{-1}{i^2}}{a_2^2-\cancel{a_2b_2 i}+\cancel{a_2b_2 i}-b_2^2\underset{-1}{i^2}}=$$

$$\frac{a_1a_2+b_1b_2+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

Pl. $$\frac{4+3i}{8-5i}=\frac{(4+3i)(8+5i)}{(8-5i)(8+5i)}=\frac{32+20i+24i+15\overset{-1}{i^2}}{64+40i-40i-25\underset{-1}{i^2}}=\frac{17+44i}{89}=\frac{17}{89}+\frac{44}{89}i$$

Trigonometrikus alak

$z=a+bi$



$a=r\cos\varphi$

$b=r\sin\varphi$

$$z=a+bi=r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot i=\underbrace{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}_{\text{komplex szám trigonometrikus alakja}},\quad 0\le\varphi<2\pi$$

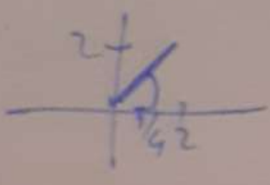
$r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$

Pl. Írjuk trigonometrikus alakba a $z=a+bi$ alakban adott komplex számot!

a) $z=2+2i$, $a=2$, $b=2$, $r=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow \varphi=\underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$ v. $\frac{5\pi}{4}$

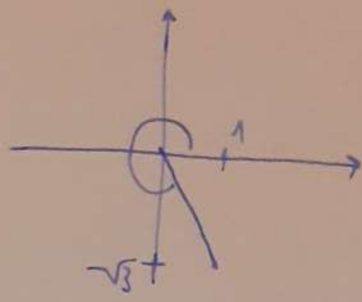
$z=2+2i=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$



b) $z = 1-\sqrt{3}i$: $a=1$, $b=-\sqrt{3}$

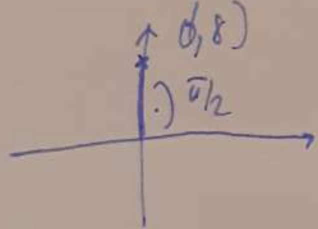
$r=\sqrt{1+3}=2$

$tg\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$ v. $\underline{\underline{\frac{5\pi}{3}}}$



$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

c) $z = 8i$: $a=0$, $b=8$



$r=\sqrt{0^2+8^2}=8$

$tg\varphi = \frac{8}{0}$ nem értelmes

$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

Műveletek trigonometrikus alakban adott komplex számokkal

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + \overset{-1}{i^2}\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$

$= r_1 r_2\left(\underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\left(\underbrace{\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\right)\right) =$

$r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$

Így $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ esetén

$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin\varphi)$

$z^3 = z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\, r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$

$\vdots$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ha $n \in \mathbb{Z}^+$.

megmutatható, hogy

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$$

Általában: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ esetén

$$z^{-n} = r^{-n}\left(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)\right)$$

Összefoglalva $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ esetén ha $m \in \mathbb{Z}$, akkor $z^m = r^m \cdot (\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$

Gyökvonás

A $z \in \mathbb{C}$ komplex számnak a $w \in \mathbb{C}$ n-edik gyöke, ha

$w^n = z.$

Legyen $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Így $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z = w^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$,

ahonnan $r = \rho^n \Rightarrow \rho = r^{1/n}$

$$n\alpha = \varphi + k\cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi + k2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

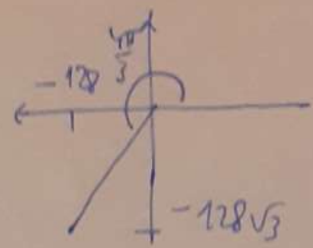
Csak $k = 0, 1, \dots, n-1$ esetén kapunk különböző komplex számokat, így a $z \neq 0$ komplex számnak n db n-edik gyöke van.

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\cdot\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Kl. 1. $z=-128-128\sqrt{3}i$, $z^{1/4}=?$ algebrai alakban

$a=-128,\ b=-128\sqrt{3} \Rightarrow r=\sqrt{(-128)^2+(-128\cdot\sqrt{3})^2}=256$

$\varphi=\dfrac{-128\sqrt{3}}{-128}=\sqrt{3} \Rightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{3}\ \vee\ \underline{\underline{\dfrac{4\pi}{3}}}$



$z^{1/4}=256^{1/4}\left(\cos\dfrac{\frac{4\pi}{3}+k2\pi}{4}+i\sin\dfrac{\frac{4\pi}{3}+k2\pi}{4}\right)$

$k=0,1,2,3$

$k=0:\quad z_1=256^{1/4}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=4\left(\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+2\sqrt{3}i$

$k=1:\quad z_2=256^{1/4}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\dfrac{1}{2}\right)=-2\sqrt{3}+2i$

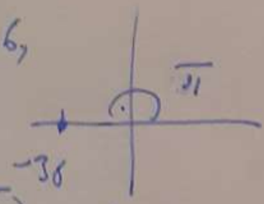
$k=2:\quad z_3=256^{1/4}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=4\left(-\dfrac{1}{2}+i\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=-2-2\sqrt{3}i$

$k=3:\quad z_4=256^{1/4}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)=2\sqrt{3}-2i$

2. $z^2+4z+13=0$

$z_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}$

$a=-36,$
$b=0$



$\sqrt{-36}:\quad -36=36(\cos\pi+i\sin\pi)$

$\sqrt{-36}=36^{1/2}\left(\cos\dfrac{\pi+k\cdot2\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi+k2\pi}{2}\right)\quad k=0,1$

$k=0:\quad 36^{1/2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=6i$

$k=1:\quad 36^{1/2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)=-6i$

$z_{1,2}=\dfrac{-4\pm(\pm6i)}{2}=\dfrac{-4\pm6i}{2}\ \begin{cases}-2+3i\\-2-3i\end{cases}$