Sorozatok

Az a_n sorozat elemei: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Sorozat megadása:

1, képlettel: pl $a_n = n^2$: $a_1 = 1^2 = 1$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 3^2 = 9, \ldots$

2, rekurzióval: pl Fibonacci számok: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$,
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ha $n \geq 3$.

4, szavakkal: pl. a_n az n-edik prímszám

a_n	első néhány tag	monotonitás	korlátosság	határérték
$\frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$	csökken	korlátos	0
$\frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$	nő	korlátos	1
$(-1)^n$	$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$	$\emptyset$	korlátos	divergens
n^2	$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$	nő	alulról korl.	divergens
$(-2)^n$	$-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$	$\emptyset$	se alulról se felülről nem korl.	divergens

Def Az sorozat monoton nő (csökken), ha

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq \boxed{a_n \leq a_{n+1}} \leq \ldots$ $\quad (a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq \boxed{a_n \geq a_{n+1}} \geq \ldots)$

Pl. $a_n = \frac{1}{n}$ monoton csökken: $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ ✓

2. $a_n = \frac{n}{n+1}$ monoton nő : $a_n = \frac{n}{n+1}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$a_n \le a_{n+1} \iff \frac{n}{n+1} \le \frac{n+1}{n+2}$ $\quad /\cdot(n+1)(n+2)$

$n(n+2) \le (n+1)^2$

$n^2+2n \le n^2+2n+1$ ✓

3, $a_n = \frac{n}{2^n}$: $a_1 = \frac{1}{2^1} = 0,5$, $a_2 = \frac{2}{2^2} = 0,5$, $a_3 = \frac{3}{2^3} = 0,375$, $a_4 = \frac{4}{2^4} = 0,25$

monoton csökken $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$

$a_n \ge a_{n+1} \iff \frac{n}{2^n} \ge \frac{n+1}{2^{n+1}}$ $\quad /\cdot 2^{n+1}$

$2^{n+1} \cdot n \ge (n+1)2^n$ $\quad /:2^n$

$2n \ge n+1$

$n \ge 1$ ✓

<u>Def</u> Az a_n sorozat felülről (alulról) korlátos, ha létezik L (K) valós szám, hogy $a_n \le L$ ($a_n \ge K$) teljesül minden n-re.

Ha a_n alulról és felülről is korlátos, akkor korlátosnak mondjuk.

Pl. 1, $a_n = \frac{1}{n}$: $0 < \frac{1}{n} \le 1$: korlátos

2, $a_n = \frac{n}{n+1}$: $0 < \frac{n}{n+1} < 1$: korlátos

3, $a_n = n^2$: $1 \le n^2$: alulról korlátos, de felülről nem

<u>Def</u> Az a_n sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha a sorozat tagjai az A számot közelítik meg. Precízen: minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik N_0, hogy ha $n \ge N_0$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ha létezik véges határértéke az a_n sorozatnak, akkor a_n-t konvergensnek mondjuk, egyébként az a_n divergens.

Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A.$

Pl. 1. $a_n = \frac{1}{n}$. $\quad a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001, \quad a_{1000000} = \frac{1}{1000000} = 0{,}000001 \approx 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $a_n = \frac{n}{n+1}$: $\quad a_{1000} = \frac{1000}{1001} = 0{,}999\ldots, \quad a_{1000000} = \frac{1000000}{1000001} = 0{,}999999\ldots \approx 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = 1$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n}+\frac{5}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{7}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\overbrace{\frac{5}{n}}^{\to 0}}{3+\underbrace{\frac{7}{n}}_{\to 0}} = \frac{2}{3}$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2$ nem létezik (divergens)

$\cancel{5.\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+1}{4^n+2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}}$

5. $$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n+7}{3n^2-6n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}+\frac{7}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{6n}{n^2}+\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\overbrace{\frac{5}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{7}{n^2}}^{\to 0}}{3-\underbrace{\frac{6}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}} = \frac{4}{3}$$

6. $$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+1}{4^n+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{4^n}+\frac{1}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n}+\frac{2^n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\overbrace{\frac{1}{4^n}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}} = 4$$

7. $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+8}{\sqrt{n^2+2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n}+\frac{8}{n}}{\underbrace{\frac{\sqrt{n^2+2n-1}}{n}}_{\sqrt{\frac{n^2+2n-1}{n^2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\overbrace{\frac{8}{n}}^{\to 0}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}} = \frac{3}{\sqrt{1}} = 3$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Ha a_n és b_n sorozatok, akkor a_n+b_n, a_n-b_n, a_nb_n, $\frac{a_n}{b_n}$ (ha $b_n\neq 0$) is egy sorozat.

Tétel Tfh $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor

1, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n = A+B$

2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n-b_n = A-B$

3, $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = A\cdot B$

4, ha $B\neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

5, ha $c\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cA$.

Pl $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{1,4-n} + \frac{2^n}{2^n+1} = -2+1=-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{1,4-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{1,4}{n}-\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\overset{\to 0}{\left(\frac{3}{n}\right)}}{\underset{\to 0}{\left(\frac{1,4}{n}\right)}-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{2^n}}{\frac{2^n}{2^n}+\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\underset{\to 0}{\left(\frac{1}{2^n}\right)}} = 1$$

~~Def Az a_n sorozat~~ Nevezetes határértékek:

1. Ha $|q|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
2. Ha $c>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ $\quad\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c} = \lim\limits_{n\to\infty} c^{\overset{\to 0}{\left(\frac{1}{n}\right)}} = c^0 = 1\right)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

Sőt: ha ~~pl~~ $p(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_1x + b_0$, $b_k>0$ (k-adfokú polinom), akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p(n)} = 1$.

Pl. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3-3n^2+7n-1} = 1$

Def Az a_n sorozat határértéke a $+\infty$, ha minden K esetén létezik N_0, hogy $a_n \geq K$ ha $n \geq N_0$.

Pl. 1. $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

2. $\lim_{n\to\infty} -n^3+n^2 = \lim_{n\to\infty} n^2(-n+1) = -\infty$.

Nevezetes $+\infty$-be tartó sorozatok: $\lim_{n\to\infty} \log_2 n = +\infty$,

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$,

$\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} n^n = +\infty$.

Erősorrend: $\log_2 n \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll n! \ll n^n$,

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Pl. 1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{3^n} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}+10^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{n!} + \frac{10^n}{n!} = 0+0 = 0.$

Az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat

Legyen $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Tehát $a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$, $a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$

$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}37, \ldots, a_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 1{,}1^{10} =$

$a_{100} = 1{,}01^{100} =$, $a_{1000} = 1{,}001^{1000}$

Megmutatható, hogy az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton nő és konvergens.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71\ldots = e$$

Általános szabály: Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c$, akkor $\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^c$.

Pl. 1. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n+5} = e^6$

$a_n = \frac{3}{n} \to 0$, $b_n = 2n+5 \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}(2n+5) = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+15}{n} = 6$

2. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n+3}{5n+7}\right)^{9n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n+7-4}{5n+7}\right)^{9n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-4}{5n+7}\right)^{9n+3} = e^{-36/5}$

$a_n = \frac{-4}{5n+7}$, $b_n = 9n+3$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-4}{5n+7}(9n+3) = \lim_{n\to\infty} \frac{-36n-12}{5n+7} = -\frac{36}{5}$

3. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+1}{2^n-3}\right)^{2^{n+5}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n-3+4}{2^n-3}\right)^{2^{n+5}+n^2} =$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{2^n-3}\right)^{2^{n+5}+n^2} = e^{128}$

7.

$a_n = \frac{4}{2^n - 3}$, $b_n = 2^{n+5} + n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2^n-3}\left(\underbrace{2^{n+5}}_{32\cdot 2^n} + n^2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{128\cdot 2^n + 4n^2}{2^n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{128\cdot 2^n}{2^n} + \overbrace{\frac{4n^2}{2^n}}^{\to 0}}{\frac{2^n}{2^n} - \underbrace{\frac{3}{2^n}}_{\to 0}} = 128$$