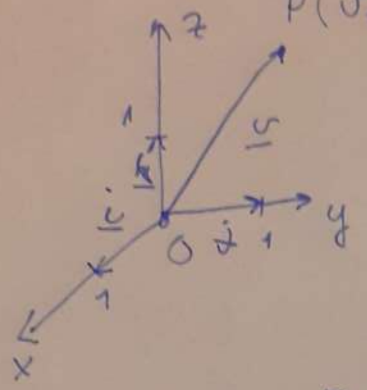
Térgeometria

Vektorok

$|\underline{i}| = |\underline{j}| = |\underline{k}| = 1$

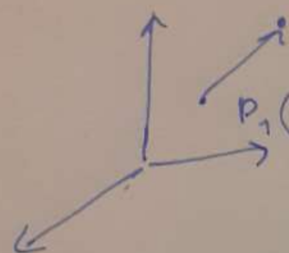


$P(v_1, v_2, v_3)$

$\overrightarrow{OP} = \underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\underline{v}$ hossza: $|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

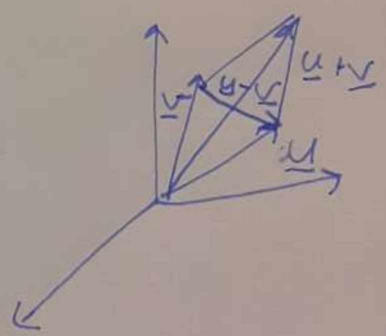
$\underline{v}$ irányú egységvektor: $\dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ $\quad (\underline{v} \neq \underline{0})$.



$P_2(x_2, y_2, z_2)$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ $\quad \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Műveletek térvektorokkal:



$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

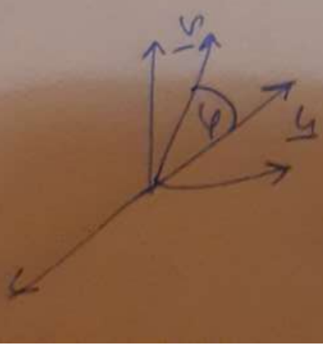
$\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$\underline{u} - \underline{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$

$\lambda \in \mathbb{R}: \lambda \underline{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$

Feladat: Határozzuk meg az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által bezárt szöget!

Skaláris szorzat



Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzata:

$\underline{u}\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}| \cos\varphi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

Tulajdonságok

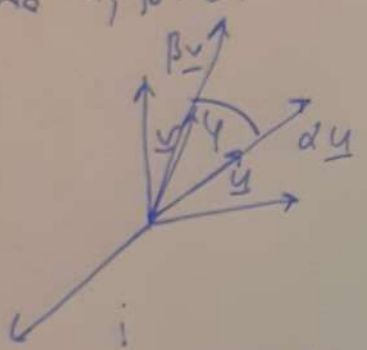
1.) $\underline{u}\,\underline{v} = 0 \quad (\underline{u},\underline{v} \neq \underline{0}) \iff |\underline{u}|\cdot|\underline{v}| \cos\varphi = 0 \iff \cos\varphi = 0$
$\iff \varphi = \frac{\pi}{2} \iff \underline{u} \perp \underline{v}$

2.) $\underline{u}\,\underline{v} = \underline{v}\,\underline{u}$ (kommutativitás)

3.) $\underline{u}\,\underline{u} = |\underline{u}||\underline{u}| \cos 0 = |\underline{u}|^2$

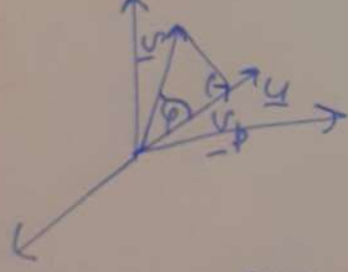
4.) Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $(\alpha\underline{u})(\beta\underline{v}) = (\alpha\beta)(\underline{u}\,\underline{v})$

Ha $\alpha, \beta > 0$:



$(\alpha\underline{u})(\beta\underline{v}) = |\alpha\underline{u}|\cdot|\beta\underline{v}| \cos\varphi = \alpha|\underline{u}|\cdot\beta|\underline{v}| \cos\varphi =$
$(\alpha\beta)(|\underline{u}||\underline{v}|\cos\varphi) = (\alpha\beta)(\underline{u}\,\underline{v})$

5.) A $\underline{v}$ vektor $\underline{u}$ vektorra vett vetülete: $\underline{v}_p = \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\cdot\underline{u}$



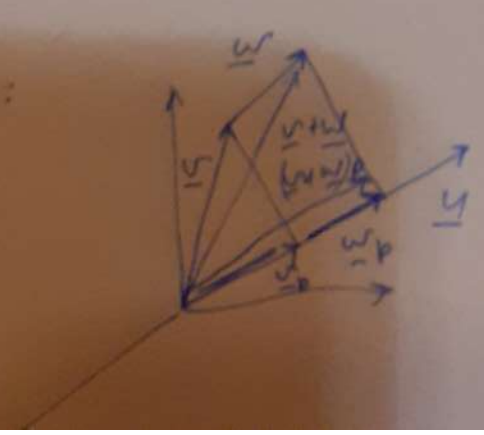
$\underline{v}_p = (\underline{v}_p$ hossza$)\cdot(\underline{u}$ irányában lévő egységvektor$) =$

$|\underline{v}| \cos\varphi \cdot \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \frac{|\underline{u}||\underline{v}|\cos\varphi}{|\underline{u}|^2}\cdot\underline{u} = \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\cdot\underline{u}$

Tehát $\underline{v}_p = \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\cdot\underline{u}$

6.) Minden $\underline{u}, \underline{v}$ és $\underline{w}$ térvektor esetén $\underline{u}(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\,\underline{v} + \underline{u}\,\underline{w}$
(disztributivitás)

Biz:



Mivel: $(\underline{v}+\underline{w})_p = \underline{v}_p + \underline{w}_p$

$$\left.\begin{aligned} \underline{v}_p &= \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\underline{u} \\ \underline{w}_p &= \frac{\underline{u}\,\underline{w}}{|\underline{u}|^2}\cdot\underline{u} \\ (\underline{v}+\underline{w})_p &= \frac{\underline{u}(\underline{v}+\underline{w})}{|\underline{u}|^2}\cdot\underline{u} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\underline{u} + \frac{\underline{u}\,\underline{w}}{|\underline{u}|^2}\underline{u} = \frac{\underline{u}(\underline{v}+\underline{w})}{|\underline{u}|^2}\cdot\underline{u} \Leftrightarrow$$

$$(\underline{u}\,\underline{v}+\underline{u}\,\underline{w})\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|^2} = \underline{u}(\underline{v}+\underline{w})\cdot\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|^2}$$

$$\Rightarrow \underline{u}\,\underline{v}+\underline{u}\,\underline{w} = \underline{u}(\underline{v}+\underline{w}) \quad (\text{ha } \underline{u}\neq\underline{0})$$

A másik oldali disztributivitás is teljesül:

$$(\underline{u}+\underline{v})\underline{w} = \underline{w}(\underline{u}+\underline{v}) = \underline{w}\,\underline{u}+\underline{w}\,\underline{v} = \underline{u}\,\underline{w}+\underline{v}\,\underline{w}.$$

7. Legyen $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$, a4<7

$\underline{u} = u_1\underline{i}+u_2\underline{j}+u_3\underline{k}$, $\underline{v} = v_1\underline{i}+v_2\underline{j}+v_3\underline{k}$

$$\underline{u}\,\underline{v} = (u_1\underline{i}+u_2\underline{j}+u_3\underline{j})(v_1\underline{i}+v_2\underline{j}+v_3\underline{k}) =$$

$$(u_1\underline{i})(v_1\underline{i})+(u_1\underline{i})(v_2\underline{j})+(u_1\underline{i})(v_3\underline{k})+(u_2\underline{j})(v_1\underline{i})+(u_2\underline{j})(v_2\underline{j})+$$
$$(u_2\underline{j})(v_3\underline{k})+(u_3\underline{k})(v_1\underline{i})+(u_3\underline{k})(v_2\underline{j})+(u_3\underline{k})(v_3\underline{k}) =$$
$$(u_1v_1)(\underline{i}\,\underline{i})+(u_1v_2)(\underline{i}\,\underline{j})+(u_1v_3)(\underline{i}\,\underline{k})+(u_2v_1)(\underline{j}\,\underline{i})+(u_2v_2)(\underline{j}\,\underline{j})+$$
$$(u_2v_3)(\underline{j}\,\underline{k})+(u_3v_1)(\underline{k}\,\underline{i})+(u_3v_2)(\underline{k}\,\underline{j})+(u_3v_3)(\underline{k}\,\underline{k})$$

$\underline{i}\perp\underline{j} \Rightarrow \underline{i}\,\underline{j}=0,\ \underline{j}\,\underline{i}=0$ $\qquad \underline{i}\,\underline{i}=|\underline{i}|^2=1$

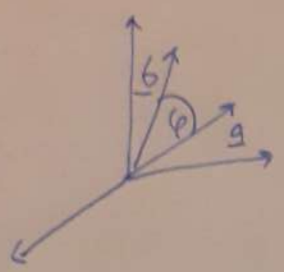
$\underline{i}\perp\underline{k} \Rightarrow \underline{i}\,\underline{k}=0,\ \underline{k}\,\underline{i}=0$ $\qquad \underline{j}\,\underline{j}=|\underline{j}|^2=1$

$\underline{j}\perp\underline{k} \Rightarrow \underline{j}\,\underline{k}=0,\ \underline{k}\,\underline{j}=0$ $\qquad \underline{k}\,\underline{k}=|\underline{k}|^2=1$

$\Rightarrow u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

Tehát $\underline{u}\,\underline{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$.

Pl. 1. Határozzuk meg az $\underline{a}=(3,4,5)$ és $\underline{b}=(2,1,0)$ térvektorok által bezárt szöget!



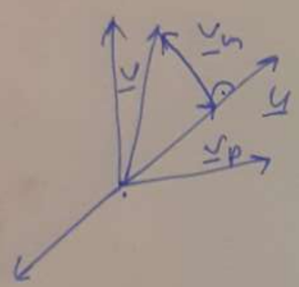
$\varphi = ?$

$\underline{a}\,\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\varphi \Rightarrow$

$$\cos\varphi = \frac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \frac{3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 5\cdot 0}{\sqrt{9+16+25}\,\sqrt{4+1+0}} = \frac{10}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{5}} = 0{,}632$$

$$\Rightarrow \varphi = 50{,}77^\circ$$

2. Bontsuk fel a $\underline{v}=(4,-1,2)$ vektort az $\underline{u}=(-2,3,1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges vektorokra!



$\underline{v} = \underline{v}_p + \underline{v}_m$

$$\underline{v}_p = \frac{\underline{u}\,\underline{v}}{|\underline{u}|^2}\cdot\underline{u} = \frac{-8-3+2}{4+9+1}\cdot(-2,3,1) = \frac{-9}{14}(-2,3,1) = \left(+\frac{18}{14}, \frac{-27}{14}, \frac{-9}{14}\right)$$

$$\underline{v}_m = \underline{v} - \underline{v}_p = (4,-1,2) - \left(+\frac{18}{14}, -\frac{27}{14}, -\frac{9}{14}\right) = \left(\frac{38}{14}, \frac{13}{14}, \frac{37}{14}\right)$$

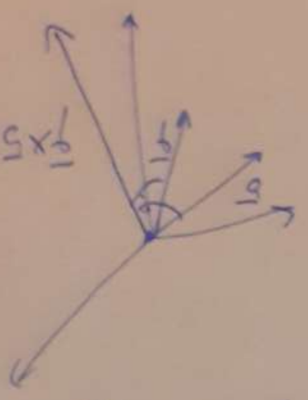
Vektoriális szorzat

Def Az $\underline{a}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$ térvektorok vektoriális szorzata az az $\underline{a}\times\underline{b}$-vel jelölt vektor, amire teljesül, hogy

1, $|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin\varphi$

2, $\underline{a}\times\underline{b} \perp \underline{a}$, $\underline{a}\times\underline{b} \perp \underline{b}$

3, az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a}\times\underline{b}$ jobbsodrású rendszert alkot (jobbkéz szabály)



Kiszámítás: $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\underline{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\underline{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\underline{k} =$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} & \underline{i} & \underline{j} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array} \right.$$

$\setminus$: $\oplus$ Sarrus szabály

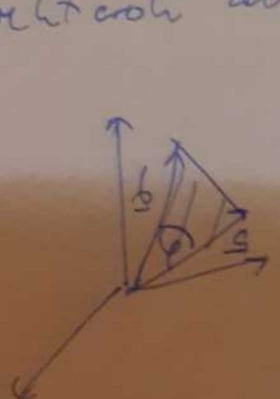
$/$: $\ominus$

Pl. 1. Számítsa ki az $\underline{a} = (3, -1, 2)$ és $\underline{b} = (5, 4, -1)$ vektorok vektoriális szorzatát!

$$\underline{a} \times \underline{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} & \underline{i} & \underline{j} \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 4 \end{array} \right. = \underline{i}(1-8) + \underline{j}(10-(-3)) + \underline{k}(12-(-5)) =$$

$$(-7, 13, 17)$$

2. Határozza meg az $\underline{a} = (-1, 2, -3)$ és $\underline{b} = (4, 1, 2)$ vektorok által meghatározott háromszög területét!



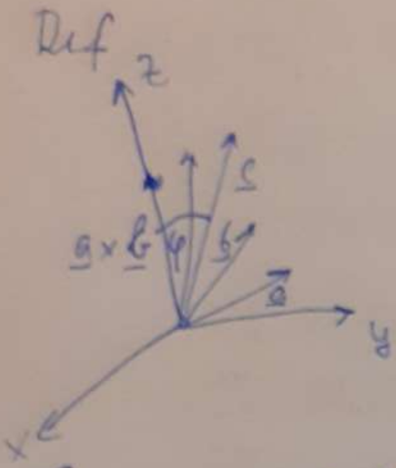
$$T_\triangle = \frac{|\underline{a}||\underline{b}| \sin\gamma}{2} = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{2} = \frac{\sqrt{49+100+81}}{2} = \frac{\sqrt{230}}{2}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} & \underline{i} & \underline{j} \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right. = \underline{i}(4-(-3)) + \underline{j}(-12-(-2))$$

$$+ \underline{k}(-1-8) = (7, -10, -9)$$

Vegyesszorzat

Def



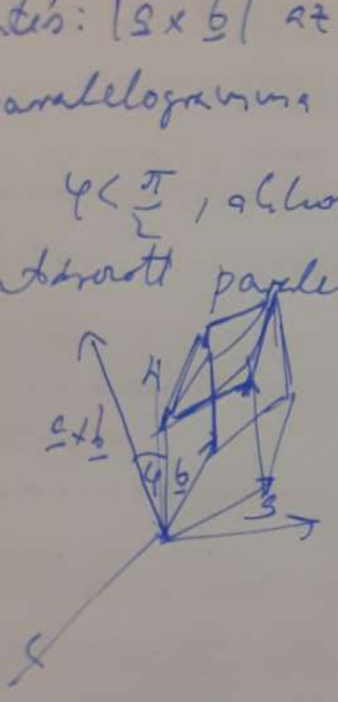
Az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ térvektorok vegyesszorzata:

$$(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c} = |\underline{a}\times\underline{b}||\underline{c}|\cos\varphi$$

Jelölés: $\underline{a}\underline{b}\underline{c}$

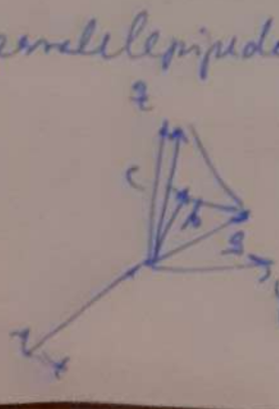
Geometriai jelentés: $|\underline{a}\times\underline{b}|$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma területe.

$|\underline{c}|\cos\varphi$: – ha $\varphi<\frac{\pi}{2}$, akkor az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon magassága



– ha $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$, akkor a paralelepipedon magasságának (−1)-szerese.

Így az $|\underline{a}\underline{b}\underline{c}|$ (abs. érték) az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata. Az $\underline{a}\underline{b}\underline{c}$ az ún. előjeles térfogat.



Az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ térvektorok által meghatározott tetraéder térfogata: $V_{tetr} = \frac{|\underline{a}\underline{b}\underline{c}|}{6}$.

5AMEA/2

Az $\underline{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ és $\underline{c}=(c_1,c_2,c_3)$ térvektorok vegyesszorzatának kiszámítása

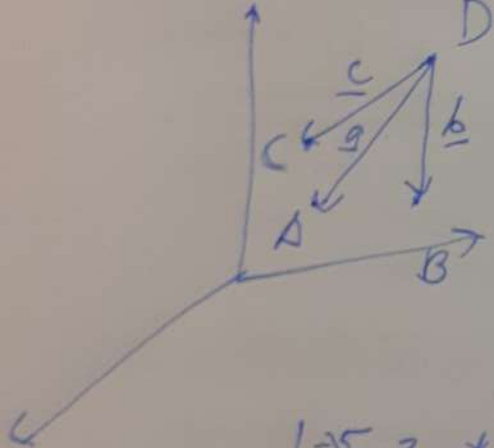
$$\underline{a}\times\underline{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_2b_1-a_1b_2)$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c}=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_2b_1-a_1b_2)c_3$$

Sarrus-szabállyal:

$$\underline{a}\underline{b}\underline{c}=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2\end{array}\right| = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

pl. Határozza meg az $A(4,-1,2)$, $B(5,3,2)$, $C(4,7,-1)$ és $D(-1,2,3)$ csúcsú tetraéder térfogatát!



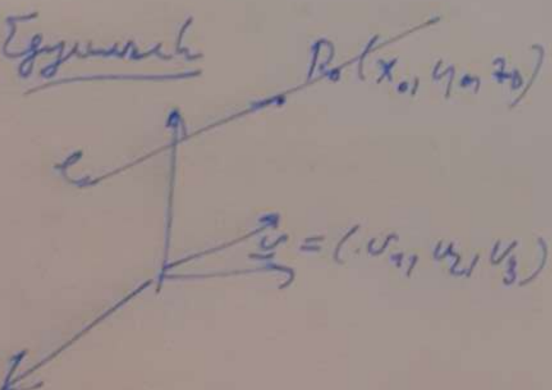
$$\underline{a}=\overrightarrow{DA}=(-5,3,1)$$
$$\underline{b}=\overrightarrow{DB}=(-6,-1,1)$$
$$\underline{c}=\overrightarrow{DC}=(5,-5,4)$$

$$V_{tetr}=\frac{|\underline{a}\underline{b}\underline{c}|}{6}=\frac{117}{6}=19{,}5$$

$$\underline{a}\underline{b}\underline{c}=\left|\begin{array}{ccc|cc} -5 & 3 & 1 & -5 & 3\\ -6 & -1 & 1 & -6 & -1\\ 5 & -5 & 4 & 5 & -5\end{array}\right| = 20+15+30-(-5)-25-(-72)$$
$$=117$$

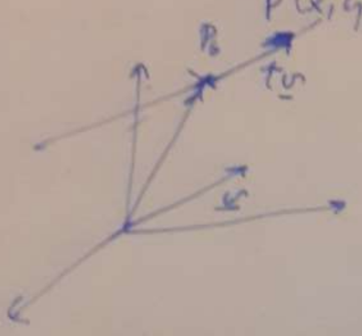
Egyenesek és síkok térben

Egyenesek



Egy térbeli egyenest annak egy pontja $P_0(x_0,y_0,z_0)$ és egy vele párhuzamos vektor: a $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$ az ún. irányvektor határozza meg.

Ekkor a egyenes általános pontja:



$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\underline{v}$

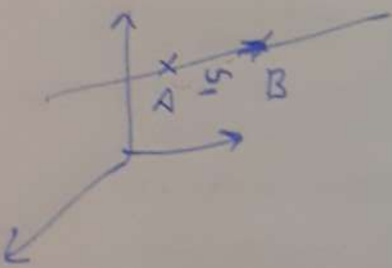
$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$

$(x,y,z) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 \end{aligned}\right\}$$ az egyenes paraméteres egyenletrendszere

$t = \boxed{\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}}$ az egyenes egyenletrendszere

Pl. 1. Határozza meg az $A(2,4,-1)$ és $B(5,3,2)$ pontokon áthaladó egyenes paraméteres egyenletrendszerét!



$\underline{v} = \vec{AB} = (3,-1,3)$

$P = A$

$x = 2 + 3t$

$y = 4 - t$

$z = -1 + 3t$

2. Adott a térben három egyenes paraméteres egyenletrendszere:

l_1: $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -1 + 2t$

l_2: $x = 4 - 2t$, $y = -1 + 4t$, $z = -4t$

l_3: $x = 4 + t$, $y = 5 + 4t$, $z = 3 + 2t$

Határozza meg a három egyenes egymáshoz viszonyított helyzetét (párhuzamos, metsző vagy kitérő)!

$\underline{v}_1 = (1,-2,2)$, $\underline{v}_2 = (-2,4,-4)$, $\underline{v}_3 = (1,4,2)$

$\underline{v}_1 \parallel \underline{v}_2 \Rightarrow l_1$ és l_2 párhuzamosak

Az l_1 és l_3 nem párhuzamosak. Metszők-e?

Ha igen, akkor létezne t_1, t_3 paraméterértékek, hogy $M(x,y,z)$ metszésponttal

$x = 2 + t_1 = 4 + t_3 \Rightarrow t_1 = 2 + t_3$

$y = 3 - 2t_1 = 5 + 4t_3 \Rightarrow 3 - 2(2 + t_3) = 5 + 4t_3 \Rightarrow -1 - 2t_3 = 5 + 4t_3$

$z = -1 + 2t_1 = 3 + 2t_3$

$-6 = 6t_3$

$t_3 = -1,\ t_1 = 1$

Ez a z-hez tartozó egyenletet kielégíti-e?

$-1 + 2 \cdot 1 \overset{?}{=} 3 + 2(-1)$

$1 \overset{!}{=} 1$ ✓

Metszők

Az l_2 és l_3 egyenesek nem párhuzamosak. Metszők-e?

$x = 4 - 2t_2 = 4 + t_3 \Rightarrow -2t_2 = t_3$

$y = -1 + 4t_2 = 5 + 4t_3 \Rightarrow -1 + 4t_2 = 5 + 4(-2t_2) \Rightarrow -1 + 4t_2 = 5 - 8t_2$

$z = -4t_2 = 3 + 2t_3$

$12t_2 = 6$

$t_2 = 0,5$

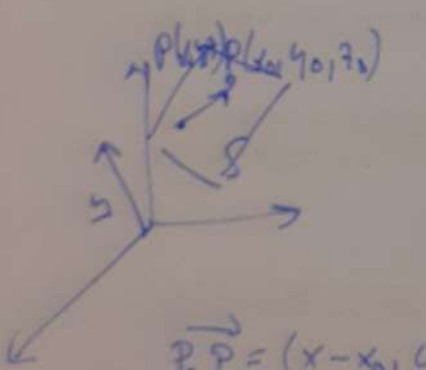
$t_3 = -1$

$z = -4 \cdot 0,5 \overset{?}{=} 3 + 2 \cdot (-1)$

$-2 \overset{?}{=} 1$ NEM: nincs metszéspont

Síkok

Egy síkot úgy adunk meg, hogy megmondjuk egy $P(x_0, y_0, z_0)$ pontját és egy rá merőleges $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ún. normálvektort.



A $P(x, y, z)$ pontosan akkor van rajta a síkon, ha $\overrightarrow{P_0P} \perp \underline{n}$.

$\overrightarrow{P_0P} \perp \underline{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}\,\underline{n} = 0$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\overrightarrow{P_0P}\,\underline{n} = n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő $\underline{n}=(n_1, n_2, n_3)$ normálvektorú sík egyenlete:

$$n_1x+n_2y+n_3z=n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0.$$

Pl. 1. Határozza meg a $P_0(3,-1,2)$ ponton átmenő, $x+2y+3z=4$ síkkal párhuzamos sík egyenletét!

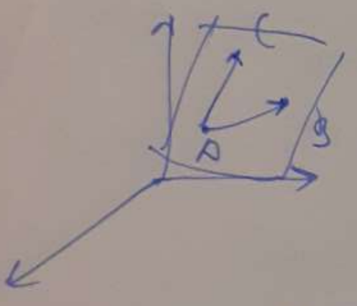
Két sík pontosan akkor párhuzamos, ha normálvektoraik párhuzamosak.

$\underline{n}=(1,2,3)$

A keresett sík egyenlete: $1(x-3)+2(y-(-1))+3(z-2)=0$

$$x+2y+3z=7$$

2. Határozza meg az $A(2,3,-1)$, $B(4,5,2)$ és $C(0,3,2)$ pontokon átmenő sík egyenletét!



normálvektor:

$$\underline{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{array}{ccc|cc} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} & \underline{i} & \underline{j} \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}=(6-0)\underline{i}+(-6-6)\underline{j}+(0-(-4))\underline{k}=(6,-12,4)$$

$\overrightarrow{AB}=(2,2,3)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,0,3)$

$P_0=A=(2,3,-1)$

Sík: $6(x-2)+(-12)(y-3)+4(z-(-1))=0$

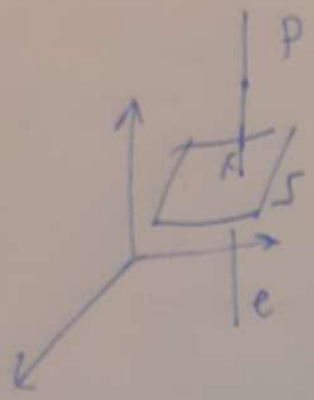
$$6x-12y+4z=-28$$

3. Határozza meg a $P(3,2,-1)$ pont és a $2x-3y+z=5$ sík távolságát!

5Δ1EΔ16

A P ponton át az S síkra merőleges egyenest állítunk, ennek az S síkkal való metszete: M

távolság: $d=|\overrightarrow{PM}|$



Az e egyenes irányvektora a sík normálvektora:

$\underline{v}=\underline{n}=(2,-3,1)$

Az e egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x=3+2t$$
$$y=2-3t$$
$$z=-1+t$$

$M=S\cap e:\ 2(3+2t)-3(2-3t)+(-1+t)=5$

$$6=14t$$
$$t=\frac{6}{14}\Rightarrow M=\left(\frac{27}{7},\frac{5}{7},-\frac{4}{7}\right)$$

$\overrightarrow{PM}=\left(\frac{6}{7},\frac{9}{7},\frac{3}{7}\right)\Rightarrow d=|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{\frac{36}{49}+\frac{81}{49}+\frac{9}{49}}=\sqrt{\frac{126}{49}}.$