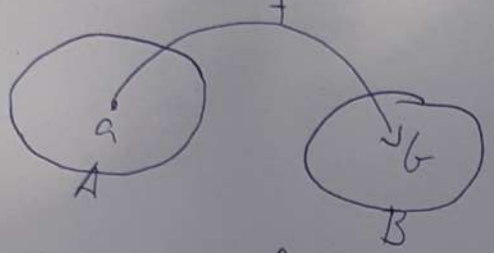
Függvények

Legyen A és B két halmaz.

Ha A minden eleméhez egy B-beli elemet rendelünk, akkor egy A-ból B-be képező függvényt (függvény = fv) definiálunk.



$b = f(a)$

Az A halmaz az f fv értelmezési tartománya. Jelölés: D_f v. ÉT.
Azon B-beli elemek összessége, ami fellép képként az f fv értékkészlete. Jelölés: R_f v. ÉK.
Tehát

$$ÉK = \{ b : \text{létezik } a \in A, \text{ hogy } b = f(a) \}.$$

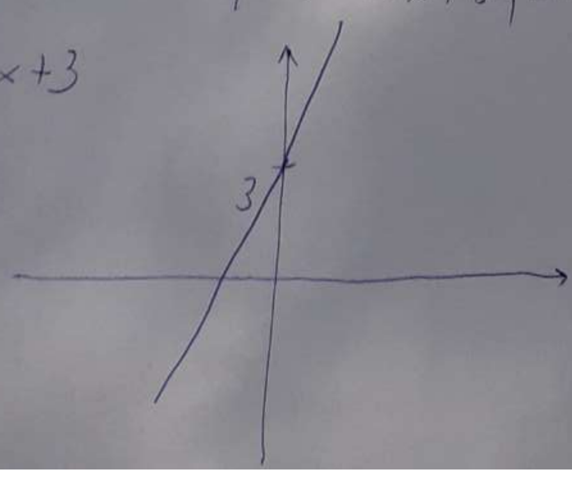
Mi olyan fv-ekkel foglalkozunk, ahol az ÉT a valós számok vagy annak részhalmaza. Ezek a valós fv-ek.

Valós fv-ek

Polinomok

Elsőfokú polinomok: $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ (egyenes)

pl. $f(x) = 2x + 3$

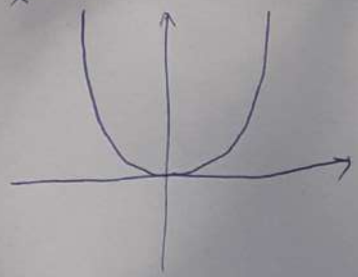


$ÉT = \mathbb{R}$

$ÉK = \mathbb{R}$

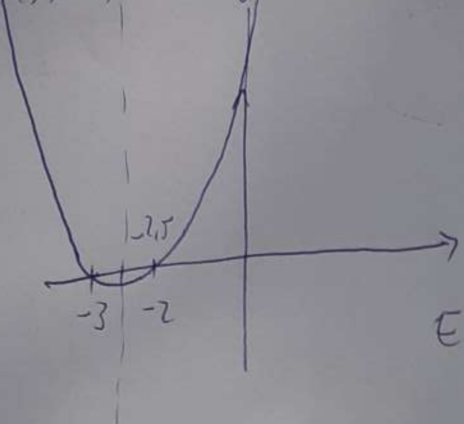
Másodfokú polinomok: $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ (1ANEA12 (parabola)) $\acute{E}T=\mathbb{R}$

Pl. $f(x)=x^2$



$\acute{E}K=\{y : y\geq 0\}$

$f(x)=x^2+5x+6$



$x^2+5x+6=0$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\overset{1}{\sqrt{25-24}}}{2}$ $\begin{array}{l} -2 \\ -3 \end{array}$

$x=-2{,}5$-ben veszi fel a legkisebb értékét

$f(-2{,}5)=(-2{,}5)^2+5(-2{,}5)+6=-\frac{1}{4}$

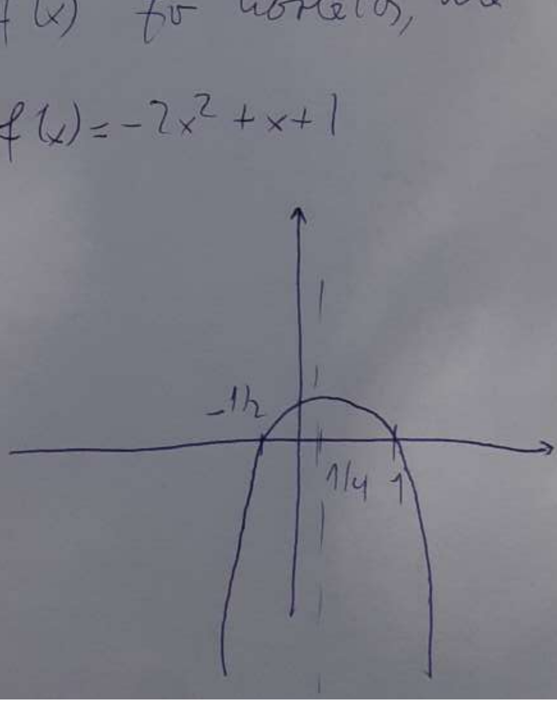
$\acute{E}K=\{y : y\geq -\frac{1}{4}\}$

Az $f(x)$ fv monoton nő (csökken) az I intervallumban, ha minden $x_1<x_2$, $x_1,x_2\in I$ esetén $f(x_1)\leq f(x_2)$ $(f(x_1)\geq f(x_2))$.

Az $f(x)$ alulról (felülről) korlátos fv, ha létezik K, hogy $f(x)\geq K$ $(f(x)\leq K)$ minden $x\in D_f$.

Az $f(x)$ fv korlátos, ha felülről és alulról is korlátos.

$f(x)=-2x^2+x+1$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\overset{3}{\sqrt{1+8}}}{-4}$ $\begin{array}{l} 1 \\ -1/2 \end{array}$



$f(\frac{1}{4})=-2(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{4}+1=\frac{9}{8}$

$\acute{E}K=\{y : y\leq \frac{9}{8})$

felülről korlátos

$]-\infty,\frac{1}{4}[$-ben monoton nő

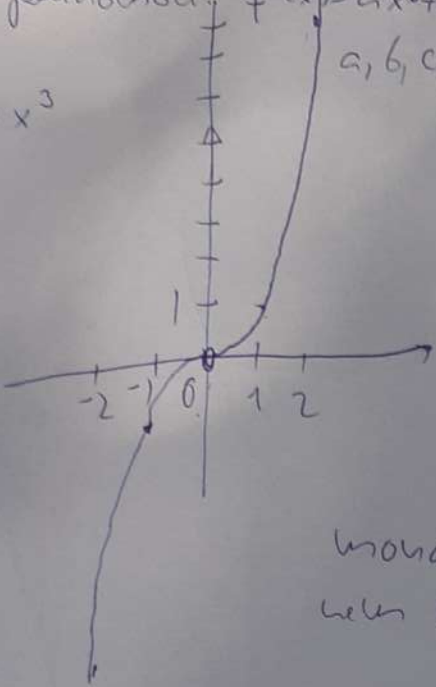
$]\frac{1}{4},+\infty[$-ben monoton csökken

1A1EA/3

Harmadfokú polinomok: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

ÉT $=\mathbb{R}$

Pl. $f(x)=x^3$



$f(0)=0^3=0$

$f(1)=1^3=1$

$f(2)=2^3=2$

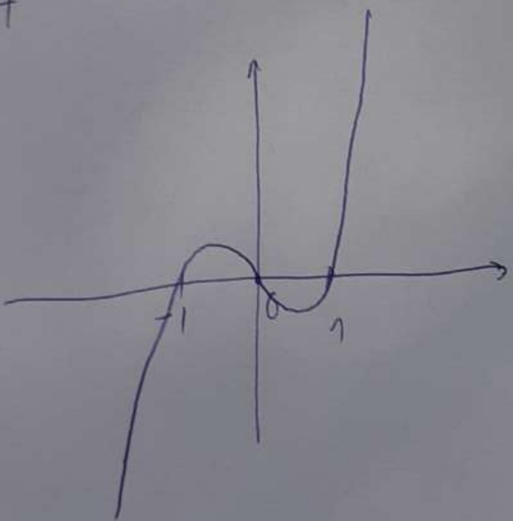
$f(-1)=(-1)^3=-1$

$f(-2)=(-2)^3=-8$

monoton nő

nem korlátos

$f(x)=x^3-x$



zérushelyek: $x^3-x=0$

$x(x^2-1)=0$

$x=0,\pm 1$

nem korlátos

ÉK $=\mathbb{R}$

később megmutatjuk, hogy

$\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$-ban és $\left]\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$-ben

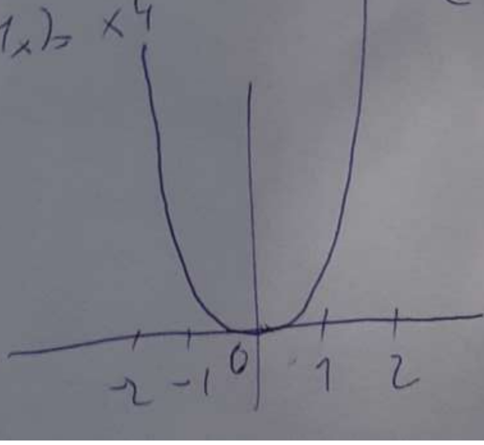
monoton nő

$\left]-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$-ban monoton csökken

Negyedfokú polinom: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$

ÉT $=\mathbb{R}$

Pl. $f(x)=x^4$



ÉK $=\{y: y\geq 0\}$

...edfokú polinom: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, MATEK 14

$a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

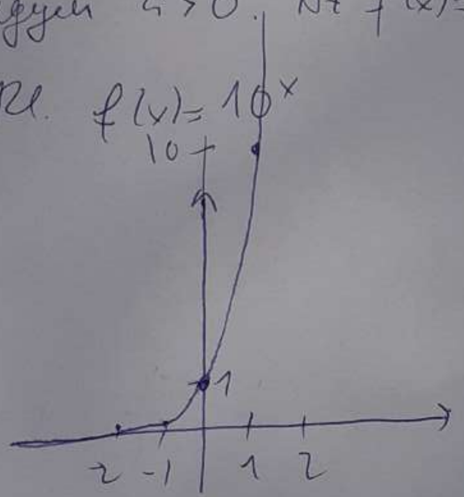
Az $f(x)$ fv páros, ha grafikonja az y tengelyre szimmetrikus, azaz $f(x) = f(-x)$. Pl. $f(x) = x^2, x^4$

Az $f(x)$ fv páratlan, ha grafikonja az origóra szimmetrikus, azaz $f(-x) = -f(x)$. Pl. $f(x) = x, x^3, x^3 - x$

Exponenciális fvek

Legyen $a > 0$. Az $f(x) = a^x$ fvt exponenciális fvnek hívjuk.

Pl. $f(x) = 10^x$



$f(0) = 10^0 = 1$ $\quad f(-1) = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$f(1) = 10^1 = 10$ $\quad f(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

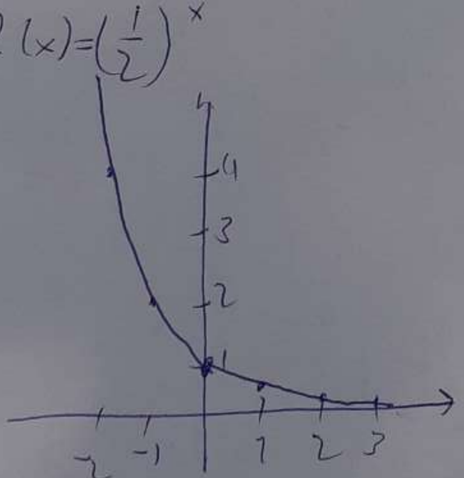
$f(2) = 10^2 = 100$

$f(3) = 10^3 = 1000$

$ÉT = \mathbb{R}^+ = \{y : y > 0\}$

monoton nő

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ $\quad f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\quad f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(2^{-1}\right)^{-2} =$

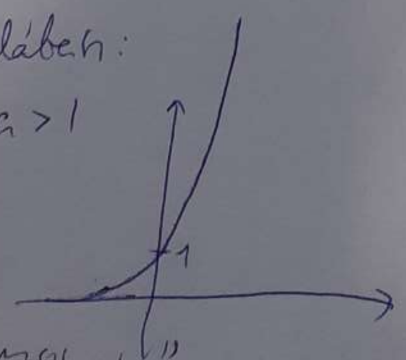
$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$ $\quad 2^2 = 4$

$f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125$ $\quad f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

monoton csökken, $ÉK = \mathbb{R}^+$

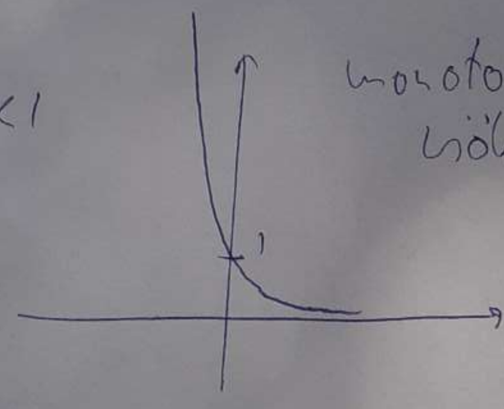
Általában:

Ha $a > 1$



mon. nő

$0 < a < 1$



monoton csökken

Logaritmus fv

Logaritmus jelentése: legyen $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$. Ekkor egyetlen olyan y valós szám van, amire $a^y=b$, $y=\log_a b$
(a alapú logaritmus b)

Pl. $2^y=8 \Rightarrow y=3$, azaz $\log_2 8=3$

$\log_{10} 10000=4$, mert $10^4=10000$

$\log_3 9=2$, mert $3^2=9$

$\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$, mert $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(2^{-1}\right)^{-3}=2^3=8$

Tudjuk, hogy $a>0$, $a\neq 1$ esetén minden $x>0$ esetén létezik y valós szám, hogy $x=a^y$. Ekkor $y=\log_a x$.

Így egy olyan fvt értelmezhetünk, ahol $ÉT=\mathbb{R}^+$.

Pl. $a=2$, $y=\log_2 x$

$x=1$: $\log_2 1=0$, mert $2^0=1$

$x=2$: $\log_2 2=1$, mert $2^1=2$

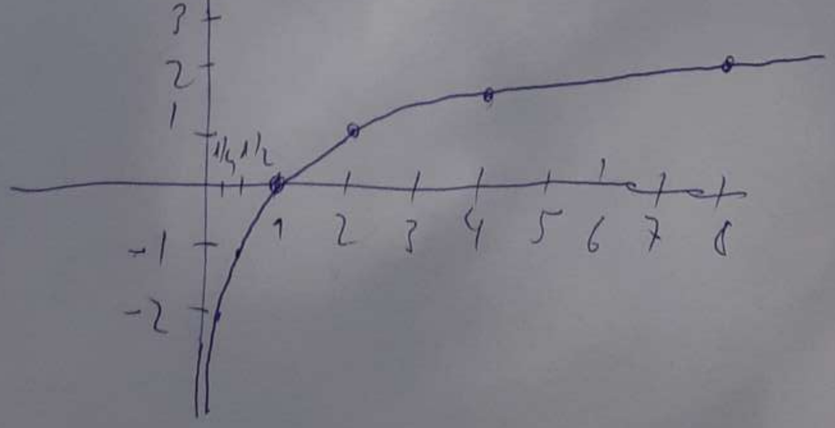
$x=4$: $\log_2 4=2$, mert $2^2=4$

$x=8$: $\log_2 8=3$, mert $2^3=8$

$x=\frac{1}{2}$: $\log_2 \frac{1}{2}=-1$, mert $2^{-1}=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{4}$: $\log_2 \frac{1}{4}=-2$, mert $2^{-2}=\frac{1}{4}$

$\log_2 x$ grafikonja:



ÉT: $\mathbb{R}$

monoton nő

ÉK: $\mathbb{R}$

$a=\frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ $\qquad$ $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$

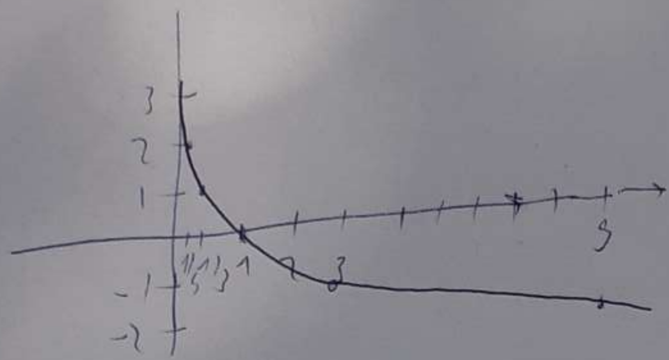
$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ $\qquad$ $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

$ÉT = \mathbb{R}^+$

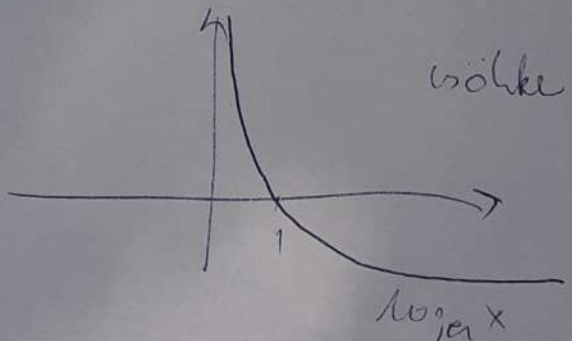
monoton csökken

$ÉK = \mathbb{R}$



Általában:

Ha $a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$



Logaritmus tulajdonságai: Legyen $a > 0$, $a \neq 1$

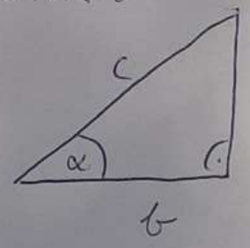
1. Ha $u, v > 0$
$$\left.\begin{array}{l} uv = a^{\log_a(uv)} \\ uv = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v} = a^{\log_a u + \log_a v} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(kölcsönösen egyértelmű)}$$
$$\Rightarrow \log_a uv = \log_a u + \log_a v$$

2. Hasonlóan: $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

3. Ha $u > 0$, $w \in \mathbb{R}$:
$$\left.\begin{array}{l} u^w = a^{\log_a(u^w)} \\ u^w = (a^{\log_a u})^w = a^{w \log_a u} \end{array}\right\} \Rightarrow \log_a u^w = w \log_a u$$

Trigonometrikus fvek

$0<\alpha<90^\circ$



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

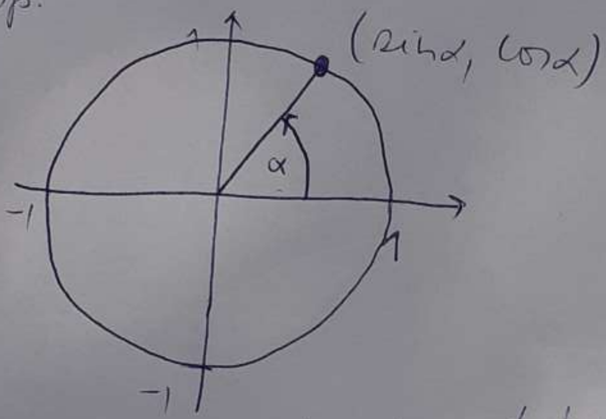
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $ctg\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\,\alpha}$

Nevezetes szögfvek: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tg\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\,45^\circ = 1$

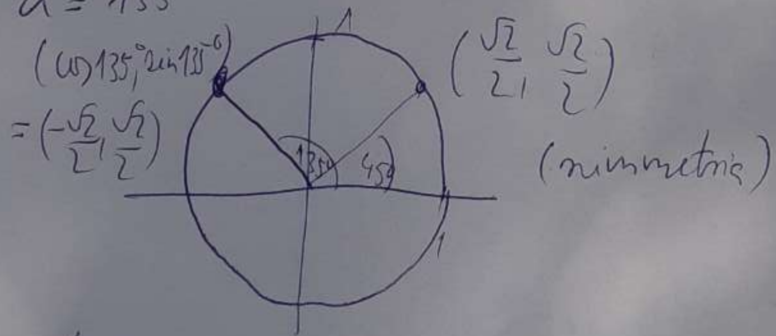
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\quad tg\,60^\circ = \sqrt{3}$

Másképp:



Ez lehetőséget ad, hogy tetszőleges α fok esetén sinα-t és cosα-t definiáljuk.

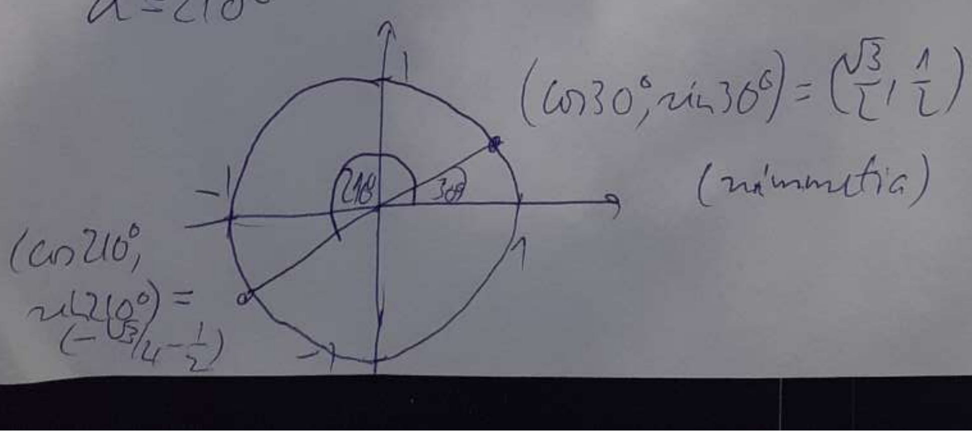
$\alpha = 135^\circ$



tehát $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 210^\circ$



tehát $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$

Nevezetes szögfv. értékek meg

$\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$

$\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$ $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$ nincs értelmezve

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$

$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Tulajdonságok: $\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos\alpha$,

$\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin\alpha$,

$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos\alpha$,

$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin\alpha$,

sőt $\cos(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \cos\alpha$, ha $k \in \mathbb{Z}$

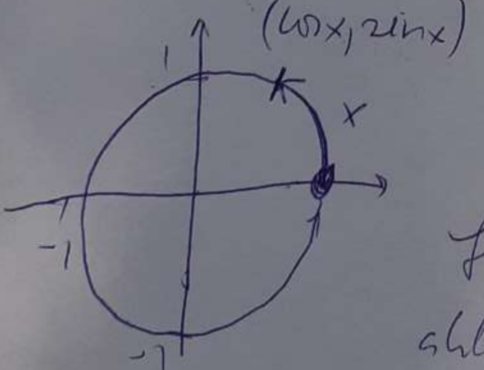
$\sin(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \sin\alpha$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \frac{\sin(\alpha + 180^\circ)}{\cos(\alpha + 180^\circ)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ ha } \cos\alpha \neq 0.$$

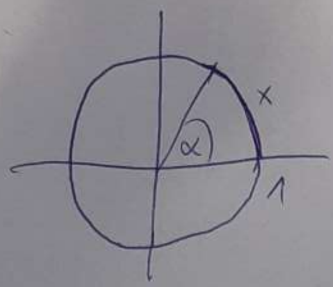
Pl. $\cos 930^\circ = \cos(210^\circ + \underbrace{2\cdot 360^\circ}_{720^\circ}) = \cos 210^\circ = \cos(30^\circ + 180^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (számológép használható!!!)

Radián

Legyen $x \in \mathbb{R}$.



Az egységkörön az óramutató járásával ellentétesen az $(1, 0)$-ból kiindulva felmérünk x hosszú ívhosszat (ha $x < 0$, akkor az óramutató járásával megegyezően mérünk). Így jutunk a $(\cos x, \sin x)$ pontba. Ekkor x radiánt mértünk fel. Így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén definiáljuk cos x, sin x értékeket.



Az x radiánhoz α szög is tartozik

$x=2\pi \leftrightarrow \alpha=360°$, azaz $2\pi=360°$

$\pi=180°$

$\frac{\pi}{3}=60°$ $\quad 17°=\frac{17\pi}{180}$

$1°=\frac{\pi}{180}$ $\quad \frac{\pi}{6}=30°,\ \frac{\pi}{4}=45°,\ \frac{2\pi}{3}=120°,$

$\frac{\pi}{2}=90°,\ \frac{5\pi}{6}=150°$

Tehát $\cos\frac{\pi}{3}=\cos 60°=\frac{1}{2}$

Nevezetes szögfvek radiánban:

$\sin 0=0,\quad \cos 0=1,\quad tg\, 0=0$

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad tg\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad tg\,\frac{\pi}{4}=1$

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad tg\,\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \cos\frac{\pi}{2}=0,\quad tg\,\frac{\pi}{2}$ nincs értelmezve

$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\quad tg\,\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$

$\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad tg\,\frac{3\pi}{4}=-1$

$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad tg\,\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos(x+\pi)=-\cos x,\quad \sin(x+\pi)=-\sin x$

$\cos(x+2\pi)=\cos x,\quad \sin(x+2\pi)=\sin x$ (a cos és sin 2π szerint periodikus fvek, sőt

$\cos(x+k2\pi)=\cos x,\quad \sin(x+k2\pi)$ ha $k\in\mathbb{Z}$.

2A1EA/6

Pl. $\cos\frac{2024\pi}{3} = \cos\frac{2022\pi+2\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}+674\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

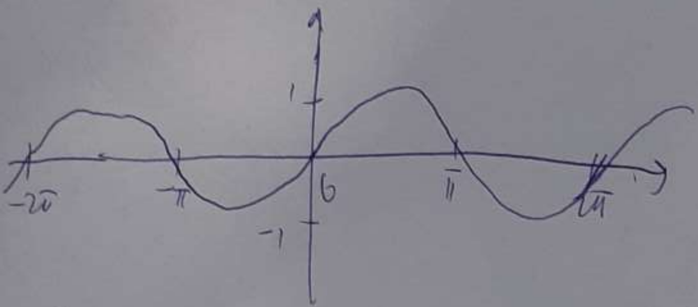
$\sin\left(-\frac{77\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{77\pi}{6}+14\pi\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) =$

$-\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

sin x fv:

ÉT: $\mathbb{R}$

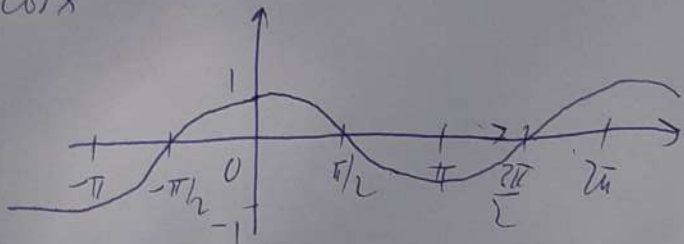
ÉK: $[-1, 1]$



cos x

ÉT: $\mathbb{R}$

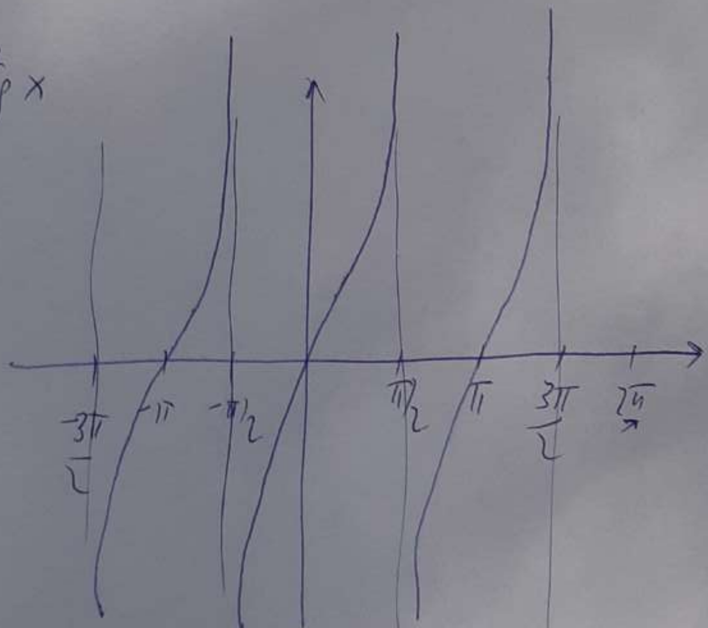
ÉK: $[-1, 1]$



tg x

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

ÉK: $\mathbb{R}$



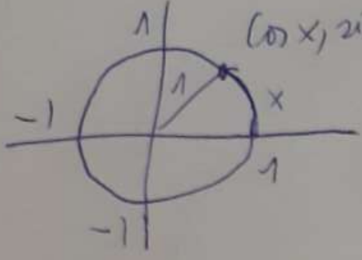
Pl. $\sin x = \frac{1}{2}$ megoldása:

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Trigonometrikus azonosságok

1. Pitagorasz-tétel



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

2. Addíciós képletek

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

3. Linearizáló formulák

$$\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \cos^2 x,$$

azaz $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

Hasonlóan: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) - \sin(x-y)\right)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$