

10. MATEMATIKA A1 FELADATSOR

1. Határozza meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int x^2 dx$

Megoldás: $\frac{x^3}{3} + C$

(b) $\int x^{15} dx$

Megoldás: $\frac{x^{16}}{16} + C$

(c) $\int \sqrt{x} dx$

Megoldás: $\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$

(d) $\int \frac{1}{x^3} dx$

Megoldás: $\frac{x^{-2}}{-2} + C$

(e) $\int 10^x dx$

Megoldás: $\frac{10^x}{\ln 10} + C$

(f) $\int 6x^4 dx$

Megoldás: $6 \cdot \frac{x^5}{5} + C$

(g) $\int 2^{x+5} dx$

Megoldás: $2^5 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$

(h) $\int x^2 + x^7 dx$

Megoldás: $\frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{8} + C$

(i) $\int 1 - x dx$

Megoldás: $x - \frac{x^2}{2} + C$

(j) $\int 3x^2 + 5x - 2 dx$

Megoldás: $x^3 + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x + C$

(k) $\int 4x^5 + x^4 - x^2 dx$

Megoldás: $4 \cdot \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$

(l) $\int \frac{x^2+1}{x} dx$

Megoldás: $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$

(m) $\int \frac{x^2+3}{\sqrt[3]{x}} dx$

Megoldás: $\frac{x^{8/3}}{8/3} + 3 \cdot \frac{x^{2/3}}{2/3} + C$

(n) $\int 6 \cos x - 3^{2x+1} dx$

Megoldás: $6 \sin x - 3 \cdot \frac{9^x}{\ln 9} + C$

(o) $\int \frac{2+x^2}{1+x^2} dx$

Megoldás: $x + \arctg x + C$

2. Határozza meg az alábbi integrálokat az $\int f(x) dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$, ha $a \neq 0$ szabállyal:

(a) $\int (3x+2)^{10} dx$

Megoldás: $\frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+2)^{11}}{11} + C$

(b) $\int (4x-10)^6 dx$

Megoldás: $\frac{1}{4} \cdot \frac{(4x-10)^7}{7} + C$

- (c) $\int \frac{1}{x+3} dx$
Megoldás: $\ln|x+3| + C$
- (d) $\int \sqrt{10x-4} dx$
Megoldás: $\frac{1}{10} \cdot \frac{(10x-4)^{3/2}}{3/2} + C$
- (e) $\int \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) dx$
Megoldás: $-\frac{1}{3} \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + C$
- (f) $\int \cos 2x dx$
Megoldás: $\frac{\sin 2x}{2} + C$
- (g) $\int e^{-x} dx$
Megoldás: $\frac{e^{-x}}{-1} + C$
- (h) $\int 10^{3x+2} dx$
Megoldás: $\frac{1}{3} \cdot \frac{10^{3x+2}}{3} + C$
- (i) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$
Megoldás: $\frac{\arctg(2x)}{2} + C$
- (j) $\int \frac{5}{x^2+2x+2} dx$
Megoldás: $5\arctg(x+1) + C$
- (k) $\int \frac{17}{9+4x^2} dx$
Megoldás: $\frac{17}{9} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{2x}{3}\right)}{2/3} + C$
- (l) $\int \frac{2}{x^2-4x+8} dx$
Megoldás: $\frac{2}{4} \frac{\arctg\left(\frac{x-2}{1/2}\right)}{1/2} + C$
- (m) $\int \frac{3}{4x^2+4x+10} dx$
Megoldás: $\frac{3}{9} \frac{\arctg\left(\frac{2x+1}{3}\right)}{2/3} + C$
- (n) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
Megoldás: $\frac{\arcsin(2x)}{2} + C$

3. Határozza meg az alábbi integrálokat az $\int f(x)^\alpha f'(x) dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, ha $\alpha \neq -1$ szabállyal:

- (a) $\int \sin^5 x \cos x dx$
Megoldás: $\frac{\sin^6 x}{6} + C$
- (b) $\int \cos^8 x \sin x dx$
Megoldás: $-\frac{\cos^9 x}{9} + C$
- (c) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$
Megoldás: $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$
- (d) $\int x(x^2+1)^{11} dx$
Megoldás: $\frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{12}}{12} + C$
- (e) $\int x \sqrt[3]{4+2x^2} dx$
Megoldás: $\frac{1}{4} \frac{(4+2x^2)^{4/3}}{4/3} + C$
- (f) $\int 3^x(3^x+8)^4 dx$
Megoldás: $\frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{(3^x+8)^5}{5} + C$

- (g) $\int e^x \sqrt{e^x + 1} dx$
Megoldás: $\frac{(e^x+1)^{3/2}}{3/2} + C$
- (h) $\int 10^{x+1}(10^x + 2)^7 dx$
Megoldás: $\frac{10}{\ln 10} \cdot \frac{(10^x+2)^8}{8} + C$
- (i) $\int \frac{2^x}{4^x+2^{x+1}+1} dx$
Megoldás: $\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{(2^x+1)^{-1}}{-1} + C$
- (j) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$
Megoldás: $\frac{\ln^3 x}{3} + C$

4. Határozza meg az alábbi integrálokat az $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$ szabállyal:

- (a) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$
Megoldás: $\ln |e^x + 1| + C$
- (b) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$
Megoldás: $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C$
- (c) $\int \frac{4x+7}{x^2+1} dx$
Megoldás: $2 \ln |x^2 + 1| + 7 \operatorname{arctg} x + C$
- (d) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$
Megoldás: $x + \ln |1 + x^2| + C$
- (e) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$
Megoldás: $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + C$
- (f) $\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx$
Megoldás: $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$
- (g) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
Megoldás: $\ln |\ln x| + C$
- (h) $\int \frac{1}{(x^2+1) \operatorname{arctg} x} dx$
Megoldás: $\ln |\operatorname{arctg} x| + C$

5. Határozza meg az $f(x)$, $a \leq x \leq b$ függvény és az x tengely közti rész területét a Newton-Leibniz tétellel:

- (a) $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 3$
Megoldás: 9
- (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq e$
Megoldás: 1
- (c) $f(x) = e^x$, $-1 \leq x \leq 1$
Megoldás: $e - \frac{1}{e}$
- (d) $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$
Megoldás: 2