

## 4. MATEMATIKA A1 FELADATSOR

1. (a) Határozza meg az  $\underline{a} = (2; 3; -1)$ ,  $\underline{b} = (-1; 2; 1)$  és  $\underline{c} = (4; 0; 3)$  vektorok vegyesszorzatát!  
**Megoldás:** 41
- (b) Határozza meg az  $\underline{a} = (-1; -1; 3)$ ,  $\underline{b} = (3; 2; 1)$  és  $\underline{c} = (1; -2; 3)$  vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát!  
**Megoldás:** 24
- (c) Határozza meg az  $\underline{a} = (5; -2; 3)$ ,  $\underline{b} = (0; 3; 2)$  és  $\underline{c} = (-1; 5; 4)$  vektorok által meghatározott tetraéder térfogatát!  
**Megoldás:**  $\frac{23}{6}$
- (d) Határozza meg az  $A(1; 4; -2)$ ,  $B(0; 4; 3)$ ,  $C(-3; 2; 1)$  és  $D(3; 1; 2)$  csúcú tetraéder térfogatát!  
**Megoldás:**  $\frac{79}{6}$
- (e) Határozza meg az  $x$  koordinátát úgy, hogy az  $\underline{a} = (x; 1; 2)$ ,  $\underline{b} = (1; 4; 3)$  és  $\underline{c} = (2; 2; 1)$  vektorok egy síkban legyenek!  
**Megoldás:**  $-\frac{7}{2}$
2. Tekintsük az  $A(1; 2; 3)$  és a  $B(7; -4; 5)$  pontokat. Határozza meg az
  - (a)  $A$  és  $B$  pontok távolságát;  
**Megoldás:**  $\sqrt{76}$
  - (b)  $A$  és  $B$  pontok által meghatározott egyenes paraméteres egyenletrendszerét;  
**Megoldás:**  $x = 3t + 1, y = -3t + 2, z = t + 3, t \in \mathbb{R}$
  - (c)  $A$  és  $B$  pontoktól egyenlő távolságra lévő sík egyenletét.  
**Megoldás:**  $3x - 3y + z = 19$
3. Tekintsük az  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 4; 5)$  és a  $C(-1; 2; -1)$  pontokat. Határozza meg az
  - (a)  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokat tartalmazó sík egyenletét;  
**Megoldás:**  $-x + z = 2$
  - (b)  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok által meghatározott háromszög területét;  
**Megoldás:**  $2\sqrt{2}$
  - (c)  $A$ ,  $B$  és  $C$  csúcú háromszögben az  $A$  csúcúsnál lévő szöget;  
**Megoldás:**  $\approx 144,74^\circ$
  - (d)  $A$ ,  $B$  és  $C$  csúcú háromszögben a  $B$  csúcúsnál lévő szöget;  
**Megoldás:**  $\approx 15,79^\circ$
  - (e)  $A$ ,  $B$  és  $C$  csúcú háromszögben a  $C$  csúcúsnál lévő szöget;  
**Megoldás:**  $\approx 19,47^\circ$
  - (f)  $A$  pont távolságát a  $B$  és  $C$  pontokon átmenő egyenestől;  
**Megoldás:**  $\frac{2\sqrt{21}}{7}$
  - (g)  $B$  pont távolságát az  $A$  és  $C$  pontokon átmenő egyenestől;  
**Megoldás:**  $\frac{2\sqrt{30}}{5}$
  - (h)  $C$  pont távolságát az  $A$  és  $B$  pontokon átmenő egyenestől.  
**Megoldás:**  $2\sqrt{2}$
4. Tekintsük az  $e: x = 3 + 2t, y = -1 + t$  és  $z = 2 - t, t \in \mathbb{R}$  és az  $f: x = 6 + s, y = 4 + 4s$  és  $z = 3 + 2s, s \in \mathbb{R}$  paraméterezésű egyeneseket.
  - (a) Mutassa meg, hogy az  $e$  és  $f$  egyenesek metszők! Határozza meg a metszéspontot!  
**Megoldás:**  $(5, 0, -1)$

- (b) Határozza meg, hogy az  $e$  és  $f$  egyenesek milyen szögben metszik egymást!  
**Megoldás:**  $\approx 69,12^\circ$
- (c) Határozza meg az  $e$  és  $f$  egyeneseket tartalmazó sík egyenletét!  
**Megoldás:**  $6x - 5y + 7z = 37$
5. Tekintsük az  $e: x = 3 + 2t, y = -1 + t$  és  $z = 2 - t, t \in \mathbb{R}$  és az  $f: x = 5 - 4s, y = 7 - 2s$  és  $z = 3 + 2s, s \in \mathbb{R}$  paraméterezésű egyeneseket.
- (a) Mutassa meg, hogy az  $e$  és  $f$  egyenesek párhuzamosak!  
**Megoldás:** Az irányvektoraik egymás skalárszorosai.
- (b) Határozza meg, hogy az  $e$  és  $f$  egyenesek távolságát!  
**Megoldás:**  $\frac{\sqrt{1758}}{6}$
- (c) Határozza meg az  $e$  és  $f$  egyeneseket tartalmazó sík egyenletét!  
**Megoldás:**  $-9x + 4y - 14z = -59$
6. Tekintsük a  $2x + 3y + 4z = 5$  egyenletű  $S$  és a  $-x + 4y + z = 7$  egyenletű  $T$  síkot.
- (a) Mutassa meg, hogy az  $S$  és  $T$  síkok nem párhuzamosak!  
**Megoldás:** A normálvektoraik nem egymás skalárszorosai.
- (b) Határozza meg az  $S$  és  $T$  síkok metszésvonalaként előálló egyenes paraméteres egyenletrendszerét!  
**Megoldás:**  $x = 13t - \frac{23}{6}, y = 6t, z = -11t + \frac{19}{6}, t \in \mathbb{R}$
- (c) Határozza meg, hogy az  $S$  és  $T$  síkok milyen szögben metszik egymást!  
**Megoldás:**  $\approx 52,21^\circ$
7. Tekintsük a  $P(3; 2; 1)$  pontot és az  $x = 4 - t, y = 2 + 3t$  és  $z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$  paraméterezésű  $e$  egyenest.
- (a) Mutassa meg, hogy a  $P$  pontot nem tartalmazza az  $e$  egyenes!  
**Megoldás:** A pont koordinátáit az egyenes egyenletrendszerébe behelyettesítve a kapott egyenletrendszernek nincs megoldása.
- (b) Határozza meg a  $P$  ponton átmenő,  $e$  egyenessel párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét!  
**Megoldás:**  $x = 3 - t, y = 2 + 3t, z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$
- (c) Határozza meg a  $P$  pont és az  $e$  egyenes távolságát!  
**Megoldás:**  $\frac{\sqrt{110}}{11}$
- (d) Határozza meg a  $P$  pontot és az  $e$  egyenest tartalmazó sík egyenletét!  
**Megoldás:**  $y - 3z = -1$
- (e) Tükrözze a  $P$  pontot az  $e$  egyenesre!  
**Megoldás:**  $(\frac{53}{11}, \frac{28}{11}, \frac{13}{11})$
- (f) Tükrözze az  $e$  egyenest a  $P$  pontra!  
**Megoldás:**  $x = 2 - t, y = 2 + 3t, z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$
8. Tekintsük a  $P(2; -1; 3)$  pontot a  $2x - y + 3z = 5$  egyenletű  $S$  síkot!
- (a) Mutassa meg, hogy a  $P$  pontot nem tartalmazza az  $S$  sík!  
**Megoldás:** A pont koordinátái nem elégítik ki a sík egyenletét
- (b) Határozza meg a  $P$  ponton átmenő,  $S$  síkkal párhuzamos sík egyenletrendszerét!  
**Megoldás:**  $2x - y + 3z = 14$
- (c) Határozza meg a  $P$  pont és az  $S$  sík távolságát!  
**Megoldás:**  $\frac{9}{\sqrt{14}}$

- (d) Tükrözze a  $P$  pontot az  $S$  síkra!  
**Megoldás:**  $(-\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7})$
- (e) Tükrözze az  $S$  síkot a  $P$  pontra!  
**Megoldás:**  $2x - y + 3z = 23$
9. Tekintsük az  $x = 2 - t$ ,  $y = 3 + 2t$  és  $z = 5 - 2t$  paraméterezésű  $e$  egyenest és a  $2x - y - z = 1$  egyenletű  $S$  síkot!
- (a) Mutassa meg, hogy az  $e$  egyenes és az  $S$  sík nem párhuzamos!  
**Megoldás:** Az egyenes irányvektora nem merőleges a sík normálvektorára.
- (b) Határozza meg az  $e$  egyenes és az  $S$  sík metszéspontját!  
**Megoldás:**  $(\frac{9}{2}, -2, 10)$
- (c) Határozza meg az  $e$  egyenes  $S$  síkra vetítésével kapott egyenes paraméteres egyenletrendszerét!  
**Megoldás:**  $x = 4 + t$ ,  $y = \frac{1}{2} - 5t$ ,  $z = \frac{13}{2} + 7t$ ,  $t \in \mathbb{R}$
- (d) Határozza meg az  $e$  egyenes és az  $S$  sík által bezárt szöget!  
**Megoldás:**  $\approx 54,74^\circ$