8. MATEMATIKA A1 FELADATSOR

1. Határozza meg következő határértékeket:

   (a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x)2x+3x^2$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{e^{2x}-1}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^7-1}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-4x^2+4x}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2-x^4}$

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)-2x}{3x^2-10x^3}$

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-shx}{x^3}$

   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\dfrac{1}{x}\right)$

   (l) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

   (m) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\dfrac{\pi}{2}-arctgx)$

2. Határozza meg az a valós számot úgy, hogy az $f(x)$ függvény mindenhol folytonos legyen:

   (a) $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{ha } x<0, \\ x+a & \text{ha } x\geq 0, \end{cases}$.

   (b) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} & \text{ha } x<1, \\ 2x+a & \text{ha } x\geq 1, \end{cases}$.

   (c) $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{x^2} & \text{ha } x<0, \\ e^x+a & \text{ha } x\geq 0, \end{cases}$.

   (d) $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{2x} & \text{ha } x>0, \\ -x+a & \text{ha } x\leq 0, \end{cases}$.

   (e) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2+x^4} & \text{ha } x<0, \\ 3x+a & \text{ha } x\geq 0, \end{cases}$.

3. Határozza meg az a és b valós számokat úgy, hogy az $f(x)$ függvény mindenhol folytonos legyen:

   (a) $f(x)=\begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{ha } x<0, \\ ax+b & \text{ha } 0\leq x\leq 1, \\ \frac{\ln x}{1-x} & \text{ha } x>1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{ha } x < -1, \\ ax+b & \text{ha } -1 \le x \le 1, \\ \frac{e^{x-1}}{1-x} & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x+\pi} & \text{ha } x < -\pi, \\ ax+b & \text{ha } -\pi \le x \le \pi, \\ \frac{\sin 2x}{x-\pi} & \text{ha } x > \pi. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-chx}{x^2} & \text{ha } x < 0, \\ ax+b & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ \frac{\sqrt{x}-1}{x^3-1} & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

4. Határozza meg, hogy az alábbi függvények hol monoton nő illetve csökken:

   (a) $f(x) = 3x^2 - 6x$
   (b) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 7$
   (c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
   (d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
   (e) xe^{-x^2}
   (f) x^2e^{-x}