8. MATEMATIKA A1 FELADATSOR

1. Határozza meg következő határértékeket:

   (a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$
   Megoldás: $-\frac{1}{2\pi}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$
   Megoldás: $\frac{2}{3}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{2x + 3x^2}$
   Megoldás: $-\frac{1}{2}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{e^{2x} - 1}$
   Megoldás: $\frac{1}{2}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^7 - 1}$
   Megoldás: $\frac{5}{7}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}$
   Megoldás: 2

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2 - x^4}$
   Megoldás: $\frac{1}{2}$

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - 2x}{3x^2 - 10x^3}$
   Megoldás: $-\frac{2}{3}$

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sh} x}{x^3}$
   Megoldás: $-\frac{1}{6}$

   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}\right)$
   Megoldás: $-\frac{1}{2}$

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1-x)} + \dfrac{1}{x}\right)$
   Megoldás: $\frac{1}{2}$

   (l) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$
   Megoldás: 1

   (m) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x)$
   Megoldás: 1

2. Határozza meg az a valós számot úgy, hogy az $f(x)$ függvény mindenhol folytonos legyen:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{ha } x < 0, \\ x + a & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$.
   Megoldás: $a = 1$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} & \text{ha } x < 1, \\ 2x + a & \text{ha } x \geq 1, \end{cases}$.
Megoldás: $a = 2$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{x^2} & \text{ha } x < 0, \\ e^x + a & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$.
Megoldás: $a = 1$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{2x} & \text{ha } x > 0, \\ -x + a & \text{ha } x \leq 0, \end{cases}$.
Megoldás: $a = \frac{1}{2}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2+x^4} & \text{ha } x < 0, \\ 3x + a & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$.
Megoldás: $a = 1$

3. Határozza meg az a és b valós számokat úgy, hogy az $f(x)$ függvény mindenhol folytonos legyen:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{ha } x < 0, \\ ax + b & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\ln x}{1-x} & \text{ha } x > 1. \end{cases}$
Megoldás: $a = -3, b = 2$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{ha } x < -1, \\ ax + b & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{e^{x-1}}{1-x} & \text{ha } x > 1. \end{cases}$
Megoldás: $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x+\pi} & \text{ha } x < -\pi, \\ ax + b & \text{ha } -\pi \leq x \leq \pi, \\ \frac{\sin 2x}{x-\pi} & \text{ha } x > \pi. \end{cases}$
Megoldás: $a = \frac{3}{2\pi}, b = \frac{1}{2}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\operatorname{ch} x}{x^2} & \text{ha } x < 0, \\ ax + b & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\sqrt{x}-1}{x^3-1} & \text{ha } x > 1. \end{cases}$
Megoldás: $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{2}$

4. Határozza meg, hogy az alábbi függvények hol monoton nő illetve csökken:

(a) $f(x) = 3x^2 - 6x$
Megoldás: $(-\infty, 1]$ intervallumon szigorúan csökken, $[1, \infty)$ intervallumon szigorúan nő

(b) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 7$
Megoldás: a $(-\infty, 2]$ és $[6, \infty)$ intervallumokon szigorúan növő, a $[2, 6]$ intervallumon szigorúan csökken

(c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
Megoldás: a $(-\infty, -1]$ és $[1, \infty)$ intervallumokon szigorúan növő, a $[-1, 1]$ intervallumon szigorúan csökken

(d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
Megoldás: a $(-\infty, -1]$ és $[1, \infty)$ intervallumokon szigorúan csökken, a $[-1, 1]$ intervallumon szigorúan nő

(e) xe^{-x^2}
Megoldás: a $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ és $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ intervallumokon szigorúan csökken, a $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ intervallumon szigorúan nő

(f) x^2e^{-x}

Megoldás: a $(-\infty, 0]$ és $[2, \infty)$ intervallumokon szigorúan csökkenő, a $[0, 2]$ intervallumon szigorúan növő