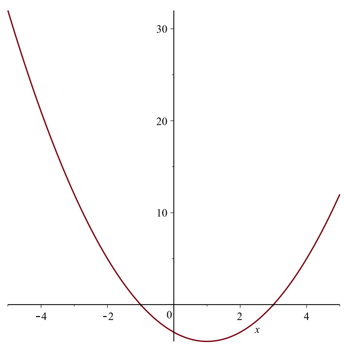
9. MATEMATIKA A1 FELADATSOR

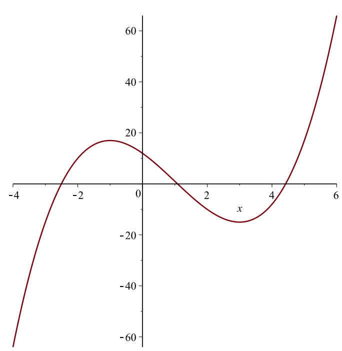
1. Végezzen teljes függvényvizsgálatot:

   (a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
   Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$, zérushelyek: $3, -1$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, a $(-\infty, 1)$ intervallumon szigorúan csökkenő, az $(1, \infty)$ inervallumon szigorúan növő, lokális minimum az $(1, -4)$ pontban, $\mathbb{R}$-en konvex, nincs inflexiós pontja, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)) = \infty$, értékkészlet: $[-4, \infty)$, grafikon:



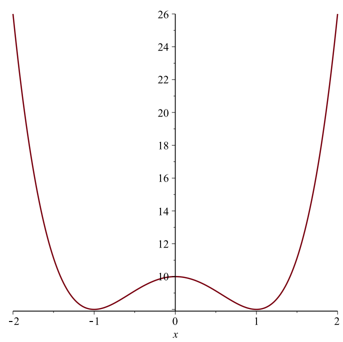
1. ábra. Az $f(x) = x^2 - 2x - 3$ függvény grafikonja a $[-5, 5]$ intervallumon

   (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$
   Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$, zérushelyek: harmadfokú egyenletnél nem tudjuk kiszámolni, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, a $(-\infty, -1)$ és a $(3, \infty)$intervallumokon szigorúan növő, a $(-1, 3)$ intervallumon szigorúan csökkenő, lokális minimum a $(3, -15)$ pontban, lokális maximum a $(-1, 17)$ pontban, a $(-\infty, 1)$ intervallumon konkáv, az $(1, \infty)$ intervallumon konvex, inflexiós pontja $(1, 1)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)) = -\infty$, értékkészlet: $\mathbb{R}$, grafikon:



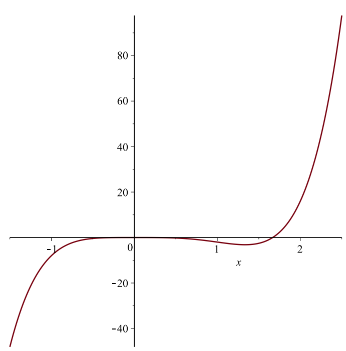
2. ábra. Az $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$ függvény grafikonja a $[-4, 6]$ intervallumon

(c) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 10$
Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$, zérushelyek: nincsenek, páros, nem periodikus, a $(-\infty, -1)$ és a $(0, 1)$intervallumokon szigorúan csökkenő, a $(-1, 0)$ és $(1, \infty)$ intervallumon szigorúan növő, lokális minimum a $(-1, 8)$ és $(1, 8)$ pontokban, lokális maximum a $(0, 10)$ pontban, a $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ intervallumokon konvex, a $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ intervallumon konkáv, inflexiós pontjai $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{80}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{80}{9}\right)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)) = \infty$, értékkészlet: $[8, \infty)$, grafikon:



3. ábra. Az $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 10$ függvény grafikonja a $[-2, 2]$ intervallumon

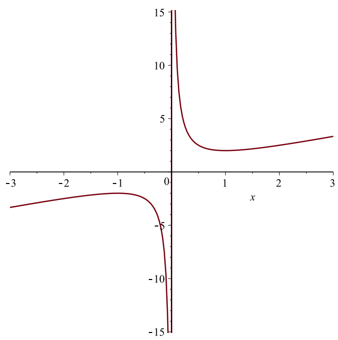
(d) $f(x) = 3x^5 - 5x^4$
Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$, zérushelyek: $0, \frac{5}{3}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, a $(-\infty, 0)$ és a $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$intervallumokon szigorúan növő, a $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ intervallumon szigorúan csökkenő, lokális minimum a $\left(\frac{4}{3}, -\frac{256}{81}\right)$ pontban, lokális maximum a $(0, 0)$ pontban, a $(-\infty, 1)$ intervallumon konkáv, az $(1, \infty)$ intervallumon konvex, inflexiós pontja $(1, -2)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)) = -\infty$, értékkészlet: $\mathbb{R}$, grafikon:



4. ábra. Az $f(x) = 3x^5 - 5x^4$ függvény grafikonja a $[-1, 5;2, 5]$ intervallumon

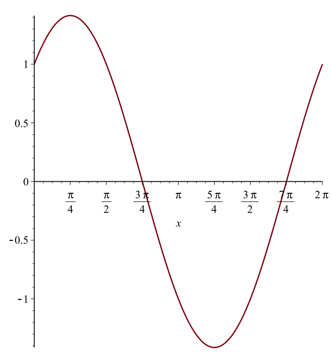
(e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
Megoldás: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, zérushelyek nincsenek, páratlan, nem periodikus, a $(-\infty, -1)$ és a $(1, \infty)$

intervallumokon szigorúan növő, a $(-1, 0)$ és $(0, 1)$ intervallumokon szigorúan csökkenő, lokális minimum az $(1, 2)$ pontban, lokális maximum a $(-1, -2)$ pontban, a $(-\infty, 0)$ intervallumon konkáv, a $(0, \infty)$ intervallumon konvex, inflexiós pontja nincs, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)) = -\infty$, értékkészlet: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, grafikon:



5. ábra. Az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény grafikonja a $[-3, 3]$ intervallumon

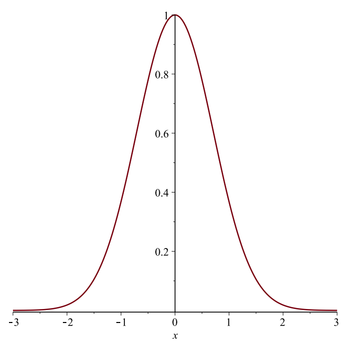
(f) $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$
Megoldás: $D_f = [0, 2\pi]$, zérushelyek: $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, nem páros, nem páratlan, a megadott értelmezési tartományon nem periodikus ($x \in \mathbb{R}$ esetén periodikus lenne), a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ és $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ intervallumokon szigorúan növő, a $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ intervallumon szigorúan csökkenő, lokális minimum az $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ pontban, lokális maximum a $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ pontban, a $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$ és $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ intervallumokon konkáv, a $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ intervallumon konvex, inflexiós pontjai $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$, értékkészlet: $\left[-\sqrt{2},, \sqrt{2}\right]$, grafikon:



6. ábra. Az $f(x) = \sin x + \cos x$ függvény grafikonja a $[0, 2\pi]$ intervallumon

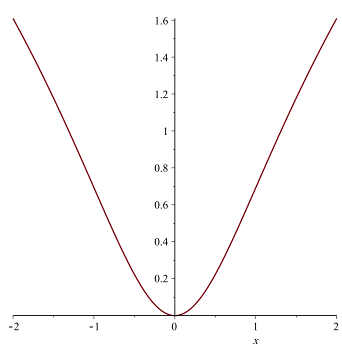
(g) $f(x) = e^{-x^2}$
Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$, zérushelyek nincsenek, páros, nem periodikus, a $(-\infty, 0)$ intervallumon szigorúan növő, a $(0, \infty)$ intervallumon szigorúan csökkenő, lokális maximum a $(0, 1)$ pontban, a

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ intervallumokon konvex, a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ intervallumon konkáv, inflexiós pontjai $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)) = 0$, értékkészlet: $(0, 1]$, grafikon:



7. ábra. Az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény grafikonja a $[-3, 3]$ intervallumon

(h) $f(x) = \ln(1 + x^2)$
Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$, zérushelyek nincsenek, páros, nem periodikus, a $(-\infty, 0)$ intervallumon szigorúan csökken, a $(0, \infty)$ intervallumon szigorúan nő, lokális minimum a $(0, 0)$ pontban, a $(-\infty, -1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon konkáv, a $(-1, 1)$ intervallumon konvex, inflexiós pontjai $(-1, \ln 2)$ és $(1, \ln 2)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)) = \infty$, értékkészlet: $[0, \infty)$, grafikon:



8. ábra. Az $f(x) = \ln(1 + x^2)$ függvény grafikonja a $[-2, 2]$ intervallumon

2. Határozza meg az 1 területű téglalapok közül a minimális kerületűt!
Megoldás: Az egységnyi oldalhosszú négyzet

3. Határozza meg, hogy 100 méter kerítéssel maximálisan mekkora területű téglalap alakú telek keríthető körbe!
Megoldás: $625\,\mathrm{m}^2$

4. Határozza meg az 1 átfogójú derékszögű háromszögek közül a maximális kerületű háromszög kerületét!
Megoldás: $\sqrt{2}+1$

5. Határozza meg az 1 térfogatú négyzet alapú hasábok közül a minimális felszínű hasáb éleinek hosszát!
Megoldás: Mindegyik éle 1

6. Határozza meg az R sugarú gömbben elhelyezhető legnagyobb térfogatú henger sugarát és magasságát!
Megoldás: A sugár $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, a magasság $m = \frac{2}{\sqrt{3}}R$.

7. Határozza meg, hogy az a alapú és m magasságú háromszögek közül melyik kerülete a legkisebb!
Megoldás: Ezen háromszögek közt az egyenlő szárú, azaz melynek oldalai $a, \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}, \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}$

8. Határozza meg, hogy az $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ hiperbola melyik pontja van a legközelebb az origóhoz!
Megoldás: Az $(1, 1)$ pontja