Zh-k összpontszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Név: Neptun kód:

EMK és KJK Matematika A1 mintavizsga, 2024 december

Munkaidő: 100 perc, a 6-9 feladatokból el kell érni 30%-ot.

1. (a) *(4 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény x_0-ban vett deriváltját!
Megoldás: Az $f(x)$ függvény deriváltja az x_0-ban a $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ határérték. Jelölés: $f'(x_0)$.

(b) *(4 pont)* Mi a geometriai jelentése az $f(x)$ függvény x_0-ban vett deriváltjának?
Megoldás: Az $f(x)$ függvény x_0-ban vett differenciálhatóságának geometriai jelentése az, hogy az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzható érintő. Ekkor az érintő meredeksége az $f'(x_0)$.

(c) *(2+2 pont)* Milyen x-ekre deriválható az $f(x)=e^{|x|}$ függvény? Ahol deriválható, ott adja meg a deriváltat!
Megoldás: Ha $x<0$, akkor $f(x)=e^{-x}$, így ekkor $f'(x)=-e^{-x}$, míg ha $x>0$, akkor $f(x)=e^x$, így $f'(x)=e^x$. Ha $x=0$, akkor a L'Hospital szabály alapján

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-x}-1}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-e^{-x}}{1}=-1$$

és

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{x}-1}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{x}}{1}=1,$$

ezért $x=0$-ban nem deriválható. Az $x=0$-ban a nem deriválhatóságra a másik lehetőség a grafikon felrazolása és ez $x=0$-ban "megtörik", emiatt ott nincs érintő, nem deriválható.

2. (a) *(4 pont)* Írja le a Lagrange-féle középérték tételt!
Megoldás: Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvényre teljesül, hogy
   i. folytonos a zárt $[a,b]$ intervallumban,
   ii. differenciálható a nyílt $]a,b[$ intervallumban,

Ekkor létezik egy $a<c<b$ valós szám, amire $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(b) *(4 pont)* Igazolja a Lagrange-féle középérték tételt az $f(x)=x^3$ függvény esetén a $[0,3]$ intervallumon!
Megoldás: Most $a=0$, $b=3$, $f(a)=f(0)=0$, $f(b)=f(3)=27$, így $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{27-0}{3-0}=9$. Tudjuk, hogy $f'(x)=3x^3$ és a $3x^2=9$ egyenletnek az $x=\pm\sqrt{3}$ a megoldása, emiatt $c=\sqrt{3}$ megfelelő.

3. (a) *(4 pont)* Definiálja az $f(x)$, $a\le x\le b$ függvény határozott integrálját!
Megoldás: Legyen $a<b$, $a=x_0<x_1<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. Ekkor ha a $\lim\limits_{n\to\infty, max_{1\le i\le n}\Delta x_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ határéték létezik az x_i osztópontok

és ξ_i választásától függetlenül, akkor azt az $f(x)$ függvény $[a,b]$-ben vett határozott integráljának (vagy Riemann-integráljának) hívjuk. Jelölés $\int_a^b f(x)dx$.

(b) *(3 pont)* Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x)$, $a \leq x \leq b$ függvény határozott integrálja létezzen!
Megoldás: Ha $f(x)$ függvény korlátos az $[a,b]$-ben és véges sok pontot leszámítva folytonos ott, akkor létezik az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál.

(c) *(3 pont)* Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!
Megoldás: Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a,b]$-ben. Legyen $f(x)$ egy primitív függvénye $F(x)$. Ekkor $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

4. Legyen $A(2,3,4)$, $B(-1,5,2)$ és $C(3,0,1)$.

(a) *(5 pont)* Határozza meg az ABC háromszög B csúcsnál lévő szögét!
Megoldás: Legyen $\underline{a}.\vec{AB} = (-3,2,-2)$, $\underline{c} = \vec{BC} = (4,-5,-1)$. Ekkor $\cos\beta = \frac{\vec{AB}\vec{BC}}{|\vec{AB}||\vec{BC}}| = \frac{20}{\sqrt{17}\sqrt{42}} = ...$, ezért $\beta = ...$

(b) *(5 pont)* Határozza meg az A, B és C pontokat tartalmazó sík egyenletét!
Megoldás: A sík normálvektora $\underline{n} = \vec{AB} \times \vec{BC} = (-12,-11,7)$, így a sík egyenlete a B pont felhasználásával: $-12(x-(-1)) - 11(y-5) + 7(z-2) = 0$, azaz $-12x - 11y + 7z = -29$.

5. *(10 pont)* Határozza meg, hogy az $f(x) = x^4 - 6x^2$ függvény hol konvex illetve konkáv!
Megoldás: $f'(x) = 4x^3 - 12x$, $f''(x) = 12x^2 - 12 = 0$, azaz $x = \pm 1$. Konvex ha $x < -1$ vagy $x > 1$ és konkáv, ha $-1 < x < 1$.

6. *(10 pont)* Határozza meg az $\int \frac{1+2x}{1+4x^2}dx$ integrált!
Megoldás: $\int \frac{1+2x}{1+4x^2}dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} + \frac{1}{4}\frac{8x}{1+4x^2} = \frac{arctg2x}{2} + \frac{1}{4}\ln|1+4x^2| + c$

7. *(10 pont)* Határozza meg az $\int e^{\sqrt{x}}dx$ integrált! Segítség: használjon $t = \sqrt{x}$ helyettesítést!
Megoldás: $t = \sqrt{x}$, azaz $x = t^2$. Igy $dx = 2tdt$. Innen $\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t 2tdt$ parciálisan integrálunk: $u = 2t$, $v' = e^t$, ezért $u' = 2$, $v = e^t$. Igy

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t 2tdt = 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + c = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$$

8. *(10 pont)* Határozza meg az $f(x) = x^2$ és $g(x) = 4x + 5$ függvények közötti síkidom területét!
Megoldás: $x^2 = 4x + 5$ esetén $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

$$\text{Terület} = \int_{-1}^{5} 4x + 5 - x^2 = \big[2x^2 + 5x - \frac{x^3}{3}\big]_{-1}^{5} = \frac{100}{3} - (-\frac{8}{3}) = 36$$

9. Határozza meg, hogy az alábbi improprius integrálok közül a konvergenseket és a divergenseket:

(a) *(5 pont)* $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x}dx$
Megoldás:

$$\lim_{B\to\infty} \int_{10}^{B} \frac{1}{x}dx = \lim_{B\to\infty} \big[\ln x\big]_{10}^{B} = \lim_{B\to\infty} (\ln B - \ln 10) = +\infty$$

, tehát az improprius integrál divergens.

(b) *(5 pont)* $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$
Megoldás:

$$\lim_{B\to\infty} \int_{10}^{B} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{B\to\infty} \int_{10}^{B} \frac{1}{x}\ln^{-2} xdx = \lim_{B\to\infty} \big[\frac{\ln^{-1} x}{-1}\big]_{10}^{B} = \lim_{B\to\infty} (-\frac{1}{\ln B} - (-\frac{1}{\ln 10})) = \frac{1}{\ln 10},$$

tehát az improprius integrál konvergens.

10. Bónusz: *(10 pont)* Határozza meg az $f(x) = x \ln x$, $1 \leq x \leq e$ függvény x tengely körüli forgatásával kapott forgástest térfogatát!

Megoldás:

$$\text{Térfogat} = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$$

Az $\int x^2 \ln^2 x dx$ kiszámolásánal parciálisan integrálunk: $u = \ln^2 x$, $v' = x^2$, ezért $u' = 2(\ln x)\frac{1}{x}$ és $v = \frac{x^3}{3}$. Igy

$$\int x^2 \ln^2 x dx = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \int 2(\ln x)\frac{1}{x}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \int \frac{2x^2}{3} \ln x dx$$

Az utóbbit integrált ismét parciálisan integráljuk: $u' = \frac{2x^2}{3}$, $v = \ln x$, azaz $u = \frac{2x^3}{9}$ és $v' = \frac{1}{x}$. Így

$$\int x^2 \ln^2 x dx = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \left(\frac{2x^3}{9} \ln x - \int \frac{2x^3}{9} \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \left(\frac{2x^3}{9} \ln x - \int \frac{2x^2}{9} dx \right) = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \left(\frac{2x^3}{9} \ln x - \frac{2x^3}{27} \right).$$

Tehát

$$\text{Térfogat} = [\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \left(\frac{2x^3}{9} \ln x - \frac{2x^3}{27} \right)]_1^e =$$

$$\frac{e^3}{3} \ln^2 e - \left(\frac{2e^3}{9} \ln e - \frac{2e^3}{27} \right) - \left(\frac{1^3}{3} \ln^2 1 - \left(\frac{2 \cdot 1^3}{9} \ln 1 - \frac{2 \cdot 1^3}{27} \right) \right) =$$

$$\frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}.$$