ÉMK és KJK Matematika A1 vizsga, 2024. december 10.

Munkaidő: 100 perc, a 6-9 feladatokból el kell érni 30%-ot.

1. (a) *(3 pont)* Definiálja az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok skaláris szorzatát! (Nem a kiszámítás kell!)
   Megoldás: Legyen az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok által bezárt szög γ. Ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok skaláris szorzata $\underline{a}\underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\gamma$. **3p**

   (b) *(3 pont)* Írja le az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok skaláris szorzatának kiszámítása módját!
   Megoldás: Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok skaláris szorzatának kiszámolása: $\underline{a}\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. **3p**

   (c) *(3 pont)* Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok. Határozza meg a $(2\underline{a})(3\underline{b}) - (3\underline{a})(2\underline{b})$ valós számot!
   Megoldás:
   $$(2\underline{a})(3\underline{b}) - (3\underline{a})(2\underline{b}) = 6(\underline{a}\underline{b}) - 6(\underline{a}\underline{b}) = 0 \quad \mathbf{3p}$$

2. (a) *(4 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett határértéke a A szám!
   Megoldás: Az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett határértéke a A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. **4p**

   (b) *(4 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az x_0 helyen folytonos!
   Megoldás: Az $f(x)$ függvény folytonos az x_0 helyen, ha létezik az $f(x_0)$, létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ határérték és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. **4p**

   (c) *(4 pont)* Határozza meg a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$ határértéket!
   Megoldás: A L'Hospital-szabályt alkalmazzuk:
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{3\cos 3x} = \frac{2}{3}. \quad \mathbf{4p}$$

3. (a) *(3 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény primitív függvényét!
   Megoldás: Az $f(x)$ függvény primitív függvénye a $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$. **3p**

   (b) *(3 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény határozatlan integrálját!
   Megoldás: Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmaza az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja. Jelölés: $\int f(x)dx$. **3p**

   (c) *(3 pont)* Milyen kapcsolat van az $f(x)$ két primitív függvények között?
   Megoldás: Ha $F(x)$ és $G(x)$ az $f(x)$ két primitív függvénye, akkor létezik c valós szám, hogy $G(x) = F(x) + c$. **3p**

4. *(10 pont)* Határozza meg a $z^3 + 64i = 0$ egyenlet gyökeinek algebrai alakjait!
   Megoldás:
   $$z^3 = -64i = 64(\cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}), \quad \mathbf{3p}$$
   ezért
   $$z = 64^{1/3}(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + \sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}), \quad k = 0, 1, 2 \quad \mathbf{3p}$$
   $$k = 0: \quad z_1 = 64^{1/3}(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}) = 4(0 + 1i) = 4i$$
   $$k = 1: \quad z_1 = 64^{1/3}(\cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}) = 4(-\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2})i) = -2\sqrt{3} - 2i$$
   $$k = 2: \quad z_1 = 64^{1/3}(\cos\frac{11\pi}{6} + \sin\frac{11\pi}{6}) = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2})i) = 2\sqrt{3} - 2i \quad \mathbf{4p}$$

5. *(10 pont)* Határozza meg, hogy az $f(x) = x^4 - 12x^3 + 16x^2 - 9$ függvény hol monoton csökken illetve nő!
Megoldás: Mivel $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 32x$ **2p**, ezért $f'(x) = 0$ pontosan akkor, ha

$$4x^3 - 36x^2 + 32x = 4x(x^2 - 9x + 8) = 4x(x-1)(x-8) = 0,$$

azaz $x = 0$, $x = 1$ és $x = 8$. **4p**

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	**4p**
$f(x)$	csökken	lok. min.	nő	lok. max.	csökken	lok. min.	nő	

6. *(10 pont)* Határozza meg az $\int \sin^4(x)\cos(x) + \sin(4x)\cos(x)dx$ integrált!
Megoldás: Az $\int f^\alpha(x) f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ szabályt és a linearizáló formulát alkalmazva

$$\int \sin^4(x)\cos(x) + \sin(4x)\cos(x)dx = \int \sin^4(x)\cos(x) + \frac{1}{2}(\sin(5x) + \sin(3x))dx = \quad \mathbf{4p}$$

$$\frac{\sin^5(x)}{5} + \frac{1}{2}(-\frac{\cos(5x)}{5}) + \frac{1}{2}(-\frac{\cos(3x)}{3}) + c \quad \mathbf{6p}$$

7. *(10 pont)* Határozza meg az $\int e^{\sqrt{2x+2}}dx$ integrált! Segítség: használjon $t = \sqrt{2x+2}$ helyettesítést!
Megoldás: Ha $t = \sqrt{2x+2}$, akkor $t^2 = 2x + 2$, azaz $x = 0,5t^2 - 1$, ezért $dx = tdt$. Innen

$$\int e^{\sqrt{2x+2}}dx = \int e^t t dt,$$

amit parciálisan integrálunk $u = t$, $v' = e^t$ választással. Ekkor $u' = 1$ és $v = e^t$, ezért

$$\int e^{\sqrt{2x+2}}dx = \int e^t tdt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + c = \sqrt{2x+2}e^{\sqrt{2x+2}} - e^{\sqrt{2x+2}} + c$$

8. Forgassuk meg az $f(x) = 1 + 2x$, $0 \le x \le 1$ függvény grafikonját az x tengely körül. Határozza meg az így kapott forgástest

   (a) *(5 pont)* térfogatát;
   Megoldás:

$$V = \pi \int_0^1 (1+2x)^2 dx = \pi \int_0^1 1 + 4x + 4x^2 dx = \pi[x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3]_0^1 = \frac{13\pi}{3},$$

   (b) *(5 pont)* felszínét!
   Megoldás:

$$V = 2\pi \int_0^1 (1+2x)\sqrt{5}dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{5} + 2\sqrt{5}xdx = 2\pi[\sqrt{5}x + \sqrt{5}x^2]_0^1 = 4\sqrt{5}\pi$$

9. Határozza meg, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyik konvergens és melyik divergens! Amelyik konvergens, annak határozza meg az értékét!

   (a) *(5 pont)* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
   Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{d \to 1-} \int_0^d \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{d \to 1-} [\arcsin x]_0^d = \lim_{d \to 1-} (\arcsin d - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2},$$

   ezért konvergens.

(b) *(5 pont)* $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx$
Megoldás:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx = \lim_{d \to 0-} \int_{-1}^{d} \frac{1}{x} dx = \lim_{d \to 0-} [\ln |x|]_0^d = \lim_{d \to 0-} (\ln d - \ln |1|) = -\infty,$$

tehát divergens

10. (BÓNUSZ) *(10 pont)* Határozza meg az $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$ és $g(x) = \sin(2x)$, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ függvények grafikonjai által közbezárt korlátos tartomány területét!
Megoldás: Ha $0 \leq x < \pi$, akkor

$$\mathrm{tg}\,(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x),$$

akkor teljesül, ha $\sin(x) = 0$, azaz $x = 0$ és $1 = 2\cos^2(x)$, azaz $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $x = \frac{\pi}{4}$. Igy a terület

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) - \mathrm{tg}\,(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) + \frac{-\sin(x)}{\cos x} dx = [\frac{-\cos(2x)}{2} + \ln |\cos(x)|]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$-\frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{2} + \ln |\cos(\frac{\pi}{4})| - \left(\frac{-\cos(0)}{2} + \ln |\cos(0)| \right) = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$