Zh-k összpontszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Név: Neptun kód:

EMK és KJK Matematika A1 mintavizsga, 2024 december

Munkaidő: 100 perc, a 6-9 feladatokból el kell érni 30%-ot.

1. (a) *(3 pont)* Definiálja az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok skaláris szorzatát!
   Megoldás: Legyen az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok által bezárt szög γ. Ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok skaláris szorzata $\underline{ab} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\gamma$.

   (b) *(3 pont)* Adja meg az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok skaláris szorzatának kiszámitási módját!
   Megoldás: Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok skaláris szorzatának kiszámolása: $\underline{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

   (c) *(2 pont)* Adjon szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az $\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$ térvektorok merőlegesek legyenek!
   Megoldás: Az $\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$ térvektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\underline{ab} = 0$.

   (d) *(2 pont)* Határozza meg az y értéket úgy, hogy az $\underline{a} = (2, y, 3)$ és $\underline{b} = (-1, 4, 10)$ térvektorok merőlegesek legyenek!
   Megoldás: $\underline{ab} = -2 + 4y + 30 = 28 + 4y = 0$, azaz $y = -7$.

2. (a) *(4 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény x_0-ban vett határértéke a A valós szám!
   Megoldás: Az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett határértéke a A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

   (b) *(4 pont)* Határozza meg a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\sin \pi x}$ határértéket!
   Megoldás: A L'Hospital-szabállyal számolunk:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x} = \frac{\ln 1}{\sin \pi} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\pi \cos \pi x} = \frac{1}{\pi \cos \pi} = -\frac{1}{\pi}$$

3. (a) *(4 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény primitív függvényét!
   Megoldás: Az $f(x)$ függvény primitív függvénye a $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$.

   (b) *(3 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény határozatlan integrálját!
   Megoldás: Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmaza az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja.

   (c) *(3 pont)* Adja meg az $f(x) = x$ függvény azon $F(x)$ primitív függvényét, amire $F(2) = 3$ teljesül!
   Megoldás: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$, ezért $F(x) = \frac{x^2}{2} + c$. Ha $F(2) = \frac{2^2}{2} + c = 2 + c = 3$, akkor $c = 1$, theát $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$.

4. *(10 pont)* Határozza meg a $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^9}{16-16i}$ komplex szám algebrai alakját!

Megoldás: $1+\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, ezért

$$(1+\sqrt{3}i)^9 = 2^9(\cos(9\frac{\pi}{6}) + i\sin(9\frac{\pi}{6})) = 2^9(0+(-1)i) = -512i.$$

Innen

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^9}{16-16i} = \frac{-512i}{16-16i} = \frac{-512i(16+16i)}{(16-16i)(16+16i)} = \frac{-512i(16+16i)}{512} = 16-16i.$$

5. *(10 pont)* Határozza meg, hogy az $f(x) = \frac{2x}{1+4x^2}$ függvény hol monoton csökken illetve nő!
Megoldás: $f'(x) = \frac{2(1+4x^2)-2x8x}{(1+4x^2)^2} = \frac{2-8x^2}{(1+4x^2)^2} = 0$, ezért $x = \pm 0,5$. Ha $x < -0,5$ vagy $x > 0,5$, akkor $f(x)$ monoton csökken; ha $-0,5 < x < 0,5$, akkor $f(x)$ monoton nő.

6. *(10 pont)* Határozza meg az $\int \frac{2-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ integrált!
Megoldás:

$$\int \frac{2-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 2\cdot(-2x)(1-x^2)^{-1/2} = 2\arcsin x - 2\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + c$$

7. *(10 pont)* Határozza meg az $\int \frac{4x+8}{x^2+5x+4}dx$ integrált!
Megoldás: $x^2+5x+4=0$ esetén $x_1=-1$ és $x_2=-4$, ezért $x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$.

$$\frac{4x+8}{x^2+5x+4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x+1)}{(x+1)(x+4)} = \frac{(A+B)x+4A+B}{x^2+5x+4},$$

ezért $A+B=4$ és $4A+B=8$, aminek a megoldása $A=\frac{4}{3}$ és $B=\frac{8}{3}$. Igy

$$\int \frac{4x+8}{x^2+5x+4} = \int \frac{4/3}{x+1} + \frac{8/3}{x+4}dx = \frac{4}{3}\ln|x+1| + \frac{8}{3}\ln|x+4| + c.$$

8. *(10 pont)* Határozza meg az $f(x) = x+\sin x$, $0 \le x \le \pi$ függvények x tengely körüli forgatásával kapott forgástest térfogatát!
Megoldás:

$$V = \pi\int_0^\pi (x+\sin x)^2dx = \pi\int_0^\pi x^2 + 2x\sin x + \sin^2 xdx.$$

Az $\int x\sin xdx$-et parciálisan integrálva $u=x$, $v'=\sin x$, azaz $u'=1$ és $v=-\cos x$ választással kapjuk, hogy

$$\int x\sin xdx = -x\cos x - \int -\cos xdx = -x\cos x + \sin x + c,$$

továbbá

$$\int \sin^2 xdx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2xdx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c,$$

így

$$V = \pi\int_0^\pi (x+\sin x)^2dx = \pi\int_0^\pi x^2+2x\sin x+\sin^2 xdx = [\frac{x^3}{3} + 2(-x\cos x+\sin x) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}]_0^\pi =$$

$$\frac{\pi^3}{3} + 2(-\pi\cos\pi + \sin\pi) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\pi}{2} - (\frac{0^3}{3} + 2(-0\cos 0 + \sin 0) + \frac{0}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 0}{2}) = \frac{\pi^3}{3} + \frac{5\pi}{2}.$$

9. Határozza meg, hogy az alábbi improprius integrálok közül a konvergenseket és a divergenseket:

(a) *(5 pont)* $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

Megoldás:

$$\lim_{B\to\infty}\int_0^B \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{B\to\infty}\left[arctgx\right]_0^B = \lim_{B\to\infty}(arctgB - arct0) = \frac{\pi}{2},$$

tehát az improprius integrál konvergens.

(b) *(5 pont)* $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}dx$

Megoldás:

$$\lim_{B\to\infty}\int_0^B \frac{1}{(1+x)^2}dx = \lim_{B\to\infty}[\frac{-1}{x+1}]_0^B = \lim_{B\to\infty}(\frac{-1}{B+1} - \frac{-1}{1+0}) = 1,$$

tehát az improprius integrál konvergens.

10. Bónusz: *(10 pont)* Határozza meg az $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx$ határozott integrált!

Megoldás: 1. megoldás:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x(\sin^2 x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x(1-\cos^2 x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)dx =$$

$$\int \sin x - 2cos^2 x \sin x + \cos^4 x \sin x dx = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

Igy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx = [-\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5}]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$-\cos\pi + \frac{2\cos^3\pi}{3} - \frac{\cos^5\pi}{5} - (-\cos(-\pi) + \frac{2\cos^3(-\pi)}{3} - \frac{\cos^5(-\pi)}{5}) = 0.$$

2. megoldás: $f(x) = \sin^5 x$ páratlan függvény, azaz $f(x)$ grafikonja szimmetrikus az O-ra és a $[-\pi,\pi]$ intervallum is az O-ra szimmetrikus intervallum, ezért a határozott integrál által meghatározott előjeles terület 0, tehát $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx = 0$.