ÉMK és KJK Matematika A1 vizsga, 2024. december 17.

Munkaidő: 100 perc, a 6-9 feladatokból el kell érni 30%-ot.

1. (a) *(3 pont)* Definiálja az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok vektoriális szorzatát! (Nem a kiszámítás kell!)
Megoldás: Legyen az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok által bezárt szög γ. Ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok vektoriális szorzata a $\underline{0}$, ha $|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \sin\gamma = 0$; egyébként az az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, amire teljesül, hogy $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \sin\gamma$; $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$; és $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ jobbsodrású rendszert alkot. **3p**

(b) *(3 pont)* Írja le az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok vektoriális szorzatának kiszámítása módját!
Megoldás: Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok vektoriális szorzatának kiszámolása: $\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$. **3p**

(c) *(3 pont)* Határozza meg $\underline{a} = (1, 2, 3)$ és $\underline{b} = (-1, 4, 2)$ térvektorok által meghatározott hármoszög területét!
Megoldás: $ter = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{2}$ **1p**, ahol $(1, 2, 3) \times (-1, 4, 2) = (-8, -5, 6)$ **1p**. Innen $ter = \frac{\sqrt{125}}{2}$. **1p**

2. (a) *(4 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett deriváltját!
Megoldás: Az $f(x)$ függvény differenciálható az x_0-ban, ha létezik a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ véges határérték. Jelölés: $f'(x_0)$. **4p**

(b) *(3 pont)* Mi az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett deriváltjának geometriai jelentése?
Megoldás: Az $f(x)$ függvény x_0-ban vett differenciálhatóságának geometriai jelentése az, hogy az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzható érintő. Ekkor az érintő meredeksége az $f'(x_0)$. **3p**

(c) *(4 pont)* Határozza meg a derivált definícióját használva az $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 3$ helyen vett deriváltját! (Csak a definíció használatáért jár pont!)
Megoldás:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 + \Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6 \quad \mathbf{3p}$$

3. (a) *(4 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény $[a, b]$ zárt integvallumban vett határozott integrálját!
Megoldás: Legyen $a < b$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ekkor ha a $\lim\limits_{n \to \infty, max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ véges határérték létezik az x_i osztópontok és ξ_i választásától függetlenül, akkor azt az $f(x)$ függvény $[a, b]$-ben vett határozott integráljának (vagy Riemann-integráljának) hívjuk. Jelölés $\int_a^b f(x)dx$. **4p**

(b) *(3 pont)* Mi az $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál geometriai jelentése?
Megoldás: Az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál az $f(x)$ függvény grafikonja és az x tengely közötti rész előjeles területét számolja ki, azaz az x tengely feletti részt $+$-szal, az alattta lévő részt $-$-szal veszi figyelembe. **3p** (előjel nélkül: **2p**

(c) *(3 pont)* Irja le a folytonos $f(x)$, $0 \le x \le b$ függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz tételt!
Megoldás: Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a, b]$-ben. Legyen $f(x)$ egy primitív függvénye $F(x)$. Ekkor $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. **3p**

4. *(10 pont)* Határozza meg a $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^9}{64-64i}$ komplex szám algebrai alakját!

Megoldás: $-1+\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ **2p**, ezért

$$(-1+\sqrt{3}i)^9 = 2^9(\cos(9\cdot\frac{2\pi}{3}) + i\sin(9\cdot\frac{2\pi}{3})) = 512(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) = 512. \quad \mathbf{4p}$$

Innen

$$\frac{(-1+\sqrt{3}i)^9}{64-64i} = \frac{512}{64-64i} = \frac{512(64+64i)}{(64-64i)(64+64i)} = \frac{32768+32768i}{8192} = 4+4i. \quad \mathbf{4p}$$

5. *(10 pont)* Határozza meg, hogy az $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 8x - 7$ függvény hol konvex illetve konkáv!
Megoldás: $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 8$, $f''(x) = 12x^2 - 72x + 60 = 0$ **3p**, azaz $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$. **3p**

Innen

	$x<1$	$x=1$	$1<x<5$	$x=5$	$5<x$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	infl. p.	konkáv	infl. p.	konvex

5p

6. *(10 pont)* Határozza meg az $\int \frac{8x-3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ integrált!
Megoldás:

$$\int \frac{8x-3}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int -(-8x)(1-4x^2)^{-1/2} - \frac{3}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx = -\frac{(1-4x^2)^{1/2}}{1/2} - 3\frac{\arcsin 2x}{2} + c \quad \mathbf{5p+5p}$$

7. *(10 pont)* Határozza meg az $\int \frac{4x+5}{x^2+3x+2}dx$ integrált!
Megoldás: $x^2+3x+2=0$ esetén $x_1=-1$, $x_2=-2$ **2p**, ezért $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Innen

$$\frac{4x+5}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A+B}{x^2+3x+2},$$

ezért $A+B=4$ és $2A+B=5$, azaz $A=1$ és $B=3$. **4p** Innen

$$\int \frac{4x+5}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}dx = \ln|x+1| + 3\ln|x+2| + c \quad \mathbf{4p}$$

8. *(10 pont)* Határozza meg az $f(x) = \frac{2}{x}$, $x>0$ és $g(x) = 5-2x$, $x>0$ függvények által határolt korlátos síkrész területét!
Megoldás: $\frac{2}{x} = 5-2x$ esetén $2 = 5x-2x^2$, azaz $2x^2-5x+2=0$, ahonnan $x_1 = 0,5$ és $x_2 = 2$ **3p**.
Így

$$ter \overset{\mathbf{2p}}{=} \int_{0,5}^{2} 5-2x-\frac{2}{x}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} [5x-x^2-2\ln|x|]_{0,5}^{2} = (10-4-2\ln 2)-(2,5-0,25-2\ln 0,5) \overset{\mathbf{3p}}{=} 3,75-4\ln 2 = 0,98$$

9. Határozza meg, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyik konvergens és melyik divergens! Amelyik konvergens, annak határozza meg az értékét!

   (a) *(5 pont)* $\int_{10}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$
   Megoldás:

$$\int_{10}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{b\to\infty}\int_{10}^{b} \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{b\to\infty}[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_{10}^{b} = \lim_{b\to\infty}(\frac{1}{2}\ln(1+b^2) - \frac{1}{2}\ln 101) = +\infty \quad \mathbf{1p},$$

   tehát divergens. (**1p**)

   (b) ***(5 pont)*** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$
   Megoldás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{a\to-\infty, b\to\infty}[arctgx]_a^b =$$

$$\lim_{a\to-\infty, b\to\infty}(artcgb - arctga) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi \quad \mathbf{1p},$$

   tehát konvergens. 1p

10. (BÓNUSZ) *(10 pont)* Bizonyítsa be, hogy $0 \leq x$ esetén $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ az $f(x) = x - \ln(1+x)$ és $g(x) = \ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2})$ függvényeket vizsgálva.

Megoldás: Mivel $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$ és $g(0) = \ln 1 - 0 = 0$, ezért elég azt megmutatni, hogy $f(x)$ és $g(x)$ monoton nő, ha $x \geq 0$. **2p** Ehhez meg elég megmutatni, hogy $f'(x) \geq 0$ és $g'(x) \geq 0$ ha $x \geq 0$. Ha $x \geq 0$, akkor

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0 \quad \mathbf{4p}$$

és

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0, \quad \mathbf{4p}$$

amit bizonyítani szerettünk volna.