Zh-k összpontszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Név: Neptun kód:

EMK és KJK Matematika A1 mintavizsga, 2024 december

Munkaidő: 100 perc, a 6-9 feladatokból el kell érni 30%-ot.

1. (a) *(3 pont)* Definiálja az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok vektoriális szorzatát!
Megoldás: Legyen az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok által bezárt szög γ. Ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok vektoriális szorzata a $\underline{0}$, ha $\underline{a}\underline{b}\sin\gamma = 0$; egyébként az az $\underline{a}\times\underline{b}$ vektor, amire teljesül, hogy $|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\sin\gamma$, $\underline{a}\times\underline{b}\perp\underline{a}$, $\underline{a}\times\underline{b}\perp\underline{b}$ és $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a}\times\underline{b}$ jobbsodrású rendszert alkot.

(b) *(3 pont)* Adja meg az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok vektoriális szorzatának kiszámítási módját!
Megoldás: Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok vektoriális szorzatának kiszámolása: $\underline{a}\times\underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.

(c) *(3 pont)* Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok. Határozza meg a $(2\underline{a})\times\underline{b} + \underline{a}\times(2\underline{b})$ térvektort!
Megoldás:

$$(2\underline{a})\times\underline{b} + \underline{a}\times(2\underline{b}) = 2(\underline{a}\times\underline{b}) + 2(\underline{b}\times\underline{a}) = 2(\underline{a}\times\underline{b}) + 2(-(\underline{a}\times\underline{b})) = \underline{0}.$$

2. (a) *(4 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény x_0-ban folytonos!
Megoldás: Az $f(x)$ függvény folytonos az x_0 helyen, ha létezik az $f(x_0)$, létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ határérték és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(b) *(4 pont)* Határozza meg az a valós számot úgy, hogy az $f(x)$ függvény mindenhol folytonos legyen:
$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{ha } x < 0, \\ x + a & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$!
Megoldás: A L'Hospital-szabály alapján

$$f(0) = a = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1} = 2.$$

3. (a) *(4 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény primitív függvényét!
Megoldás: Az $f(x)$ függvény primitív függvénye a $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$.

(b) *(3 pont)* Legyen $f(x)$ két primitív függvénye $F(x)$ és $G(x)$. Milyen kapcsolat van $F(x)$ és $G(x)$ között?
Megoldás: Ha $F(x)$ és $G(x)$ az $f(x)$ két primitív függvénye, akkor létezik c valós szám, hogy $G(x) = F(x) + c$.

(c) *(3 pont)* Adja meg az $f(x) = x$ függvény két primitív függvényét!
Megoldás: *Pl.* $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^2}{2} + 1$

4. *(10 pont)* Határozza meg a $z^4 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$ egyenlet komplex gyökeinek algebrai alakját!!

Megoldás: $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i = 16(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$, ezért $z = 16^{1/4}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4})$, ahol $k = 0, 1, 2, 3$.

$$k=0: \qquad z_1 = 16^{1/4}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 0\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 0\pi}{4}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$k=1: \qquad z_2 = 16^{1/4}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 1\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 1\pi}{4}) = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$$

$$k=2: \qquad z_3 = 16^{1/4}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 2\pi}{4}) = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$k=3: \qquad z_4 = 16^{1/4}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 3\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\cdot 3\pi}{4}) = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3} - i$$

5. *(10 pont)* Határozza meg, hogy az R sugarú körbe írható téglalapok közül melyik területe a legnagyobb!
Megoldás: Ha x és y a két oldala a R sugarú körbe írható téglalapnak, akkor a téglalap átlója $2R$, ezért a Pitagorasz-tétel szerint $x^2 + y^2 = (2R)^2 = 4R^2$, ezért $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$. A terület $xy = x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Ezért $ter(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $0 < x < 2R$ függvényt maximumát keressük.

$$ter'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} + x\frac{1}{2}(4R^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{4R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0$$

azaz $x = \sqrt{2}R$. Ha $0 < x < \sqrt{2}R$, akkor $ter'(x) > 0$, ezért $ter(x)$ monoton nő és ha $\sqrt{2}R < x < 2R$, akkor $ter'(x) < 0$, tehát $ter(x)$ monoton csökken, így $ter(x)$ maximuma $x = \sqrt{2}R$-nél van és ekkor $y = \sqrt{2}R$, azaz a négyzet adja a maximális területet.

6. *(10 pont)* Határozza meg az $\int xe^{2x}dx$ integrált!
Megoldás: Parciálisan integrálunk: $u = x$, $v' = e^{2x}$, ezért $u' = 1$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$. Igy

$$\int xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$$

7. *(10 pont)* Határozza meg az $\int\frac{2}{x^2+2x-8}dx$ integrált!
Megoldás: Az $x^2 + 2x - 8 = 0$ megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, ezért $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$. Ekkor

$$\frac{2}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4) + B(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{(A+B)x + 4A - 2B}{x^2+2x-8},$$

ezért $A + B = 0$, $4A - 2B = 2$, aminek a megoldása $A = \frac{1}{3}$ és $B = -\frac{1}{3}$, ezért

$$\int\frac{2}{x^2+2x-8}dx = \int\frac{1/3}{x-2} + \frac{-1/3}{x+4}dx = \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+4| + c$$

8. Forgassa meg az $f(x) = x^3$, $0 \le x \le 1$ függvény grafikonját az x tengely körül! Határozza meg az így kapott forgástest
Megoldás:

   (a) *(5 pont)* térfogatát;
   Megoldás:

$$V = \pi\int_0^1 (x^3)^2dx = \int_0^1 x^6dx = [\frac{x^7}{7}]_0^1 = \frac{1}{7}$$

(b) *(5 pont)* felszínét.
Megoldás: Mivel $f'(x) = 3x^2$, ezért

$$A = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx = \int \frac{1}{36}(36x^3)(1+9x^4)^{1/2}dx = [\frac{1}{36}\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{3/2}]_0^1$$

$$= \frac{1}{54}(10^{3/2}-1)$$

9. Határozza meg, hogy az alábbi improprius integrálok közül a konvergenseket és a divergenseket:

(a) *(5 pont)* $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$
Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0+}[\ln x]_a^1 = \lim_{a\to 0+} \ln 1 - \ln a = +\infty,$$

ezért az improprius integrál divergens.

(b) *(5 pont)* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 x^{-1/2}dx = \lim_{a\to 0+}[\frac{x^{1/2}}{1/2}]_a^1 = \lim_{a\to 0+} 2 - 2\sqrt{a} = 2,$$

ezért az improprius integrál konvergens.

10. Bónusz: *(10 pont)* Mutassa meg, hogy az $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$ sorozat monoton nő!
Megoldás: Ha $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, akkor $a_{n+1} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Azt kell megmutatnunk, hogy $a_n \leq a_{n+1}$, azaz $\frac{e^n n!}{n^n} \leq \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. De,

$$\frac{e^n n!}{n^n} \leq \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{n!}{n^n} \leq \frac{en!}{(n+1)^n} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < e \Leftrightarrow (1+\frac{1}{n})^n < e,$$

amiről tudjuk, hogy igaz.