

Zh-k összpontszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Név:

Neptun kód:

Előadó monogramja:

## ÉMK és KJK Matematika A1 vizsga, 2025. január 7.

Munkaidő: 100 perc, a 6-9 feladatokból el kell érni 30%-ot.

- (a) (3 pont) Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az  $a_n$  sorozat monoton nő!

(b) (4 pont) Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az  $a_n$  sorozat határértéke a  $A$  szám!

(c) (3 pont) Adjon meg egy olyan monoton növény sorozatot, aminek a határértéke a 3.
- (a) (4 pont) Definiálja az  $f(x)$  függvény  $x_0$  helyen vett deriváltját!

(b) (3 pont) Mi az  $f(x)$  függvény  $x_0$  helyen vett deriváltjának geometriai jelentése?

(c) (3 pont) Adjon meg egy olyan függvényt, ami minden valós szám esetén deriválható kivéve az  $x_0 = 0$ -t.
- (a) (3 pont) Definiálja az  $f(x)$  függvény határozatlan integrálját!

(b) (4 pont) Definiálja az  $f(x)$  függvény  $[a, b]$  zárt intervallumban vett határozott integrálját!

(c) (3 pont) Irja le a folytonos  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  függvényre vonatkozó Newton-Leibniz tételt!
- Tekintsük a  $P(1, 2, 3)$  pontot és a  $2x - y + 3z = 1$  egyenletű  $S$  síkot!

(a) (4 pont) Határozza meg a  $P$  ponton átmenő,  $S$  síkkal párhuzamos sík egyenletét!

(b) (6 pont) Határozza meg a  $P$  pont és az  $S$  sík távolságát!
- (10 pont) Határozza meg, hogy az  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x > 0$  függvény hol monoton nő illetve csökken!
- (10 pont) Határozza meg az  $\int x^2 \ln x + \frac{\ln^2 x}{x} dx$  integrált!
- (10 pont) Határozza meg az  $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$  integrált! Segítség: használjon  $t = \sqrt{x}$  helyettesítést.
- (10 pont) Határozza meg az  $f(x) = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  és  $g(x) = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  függvények grafikonjainak metszéspontjait! Legyenek ezek  $x_1$  és  $x_2$ . Határozza meg az  $x_1$  és  $x_2$  metszéspontok között az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények grafikonjai által közrefogott síkrész területét!
- Határozza meg, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyik konvergens és melyik divergens! Amelyik konvergens, annak határozza meg az értékét!

(a) (5 pont)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(b) (5 pont)  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$
- (BÓNUSZ) (10 pont) Tegyük fel, hogy a  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  harmadfokú, valós együtthatós polinomra teljesül, hogy  $a_0 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $p(-2024) < 0$  és  $p(2025) < 0$ . Hány különböző valós gyöke van  $p(x)$ -nek?