Zh-k összpontszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Név: Neptun kód: Előadó monogramja:

ÉMK és KJK Matematika A1 vizsga, 2025. január 7.

Munkaidő: 100 perc, a 6-9 feladatokból el kell érni 30%-ot.

1. (a) *(3 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az a_n sorozat monoton nő!
Megoldás: Az a_n sorozat monoton nő, ha $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$, azaz $a_n \leq a_{n+1}$, ha n pozitív egész. **3p**

   (b) *(4 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az a_n sorozat határértéke a A szám!
Megoldás: Az a_n sorozat határértéke a A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ estén létezik N, hogy ha $n \geq N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$. **4p**

   (c) *(3 pont)* Adjon meg egy olyan monoton növő sorozatot, aminek a határértéke a 3.
Megoldás: Pl. $a_n = 3 - \frac{1}{n}$ **3p**

2. (a) *(4 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett deriváltját!
Megoldás: Az $f(x)$ függvény differenciálható az x_0-ban, ha létezik a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ véges határérték. Jelölés: $f'(x_0)$. **4p**

   (b) *(3 pont)* Mi az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett deriváltjának geometriai jelentése?
Megoldás: Az $f(x)$ függvény x_0-ban vett differenciálhatóságának geometriai jelentése az, hogy az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzható érintő. Ekkor az érintő meredeksége az $f'(x_0)$. **3p**

   (c) *(3 pont)* Adjon meg egy olyan függvényt, ami minden valós szám esetén deriválható kivéve az $x_0 = 0$-t.
Megoldás: Pl. $f(x) = |x|$ **3p**

3. (a) *(3 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény határozatlan integrálját!
Megoldás: Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmaza az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja. Jelölés: $\int f(x)dx$. **3p**

   (b) *(4 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény $[a, b]$ zárt integvallumban vett határozott integrálját!
Megoldás: Legyen $a < b$, $a = x_0 < x_1 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ekkor ha a $\lim\limits_{n \to \infty, max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ véges határérték létezik az x_i osztópontok és ξ_i választásától függetlenül, akkor azt az $f(x)$ függvény $[a, b]$-ben vett határozott integráljának (vagy Riemann-integráljának) hívjuk. Jelölés $\int_a^b f(x)dx$. **4p**

   (c) *(3 pont)* Irja le a folytonos $f(x)$, $a \leq x \leq b$ függvényre vonatkozó Newton-Leibniz tételt!
Megoldás: Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a, b]$-ben. Legyen $f(x)$ egy primitív függvénye $F(x)$. Ekkor $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. **3p**

4. Tekintsük a $P(1,2,3)$ pontot és a $2x-y+3z=1$ egyenletű S síkot!

   (a) *(4 pont)* Határozza meg a P ponton átmenő, S síkkal párhuzamos sík egyenletét!
   Megoldás: Az S sík normálvektora: $\underline{n}=(2,-1,3)$ **2p**. A sík egyenlete: $2(x-1)-(y-2)+3(z-3)=0$, azaz $2x-y+3z=9$. **2p**

   (b) *(6 pont)* Határozza meg a P pont és az S sík távolságát!
   Megoldás: A P ponton átmenő, S síkra merőleges egyenes egyenlete: $x=1+2t$, $y=2-t$, $z=3+3t$ **2p**. Ennek az egyenesnek és az S síknak az M metszéspontja: $2(1+2t)-(2-t)+3(3+3t)=1$, azaz $14t=-8$, tehát $t=-\frac{4}{7}$ **1p**. Így $M=(-\frac{1}{7},\frac{18}{7},\frac{9}{7})$. **1p** Ekkor $\overrightarrow{PM}=(-\frac{8}{7},\frac{4}{7},-\frac{12}{7})$. **1p** A pont és sík távolsága: $d=|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{(-\frac{8}{7})^2+(\frac{4}{7})^2+(-\frac{12}{7})^2}=\frac{\sqrt{224}}{7}$. **1p**

5. *(10 pont)* Határozza meg, hogy az $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$ függvény hol monoton nő illetve csökken!
Megoldás: $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$ **3p**, $x=e$ **2p**

	$0<x<e$	$x=e$	$x<e$
$f'(x)$	$+$	0	-
$f(x)$	nő	lok. max.	csökken

5p

6. *(10 pont)* Határozza meg az $\int x^2\ln x+\frac{\ln^2 x}{x}dx$ integrált!
Megoldás: Parciálisan integrálva $u=\ln x$ és $v'=x^2$ választással $u'=\frac{1}{x}$ és $v=\frac{x^3}{3}$, ezért

$$\int x^2\ln x dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c \quad \mathbf{5p}$$

és

$$\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\int\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{\ln^3 x}{3}+c, \quad \mathbf{4p}$$

ezért

$$\int x^2\ln x+\frac{\ln^2 x}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{\ln^3 x}{3}+c \quad \mathbf{1p}$$

7. *(10 pont)* Határozza meg az $\int\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$ integrált! Segítség: használjon $t=\sqrt{x}$ helyettesítést.
Megoldás: Ha $t=\sqrt{x}$, akkor $x=t^2$, ezért $dx=2tdt$ **3p**, ezért

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx\overset{\mathbf{2p}}{=}\int\frac{1}{t^2+t}2tdt=\int\frac{2t}{t^2+t}dt=\int\frac{2}{t+1}dt\overset{\mathbf{3p}}{=}2\ln(1+t)+c\overset{\mathbf{2p}}{=}2\ln(1+\sqrt{x})+c$$

8. *(10 pont)* Határozza meg az $f(x)=\sin x$, $0\le x\le 2\pi$ és $g(x)=\cos x$, $0\le x\le 2\pi$ függvények grafikonjainak metszéspontjait! Legyenek ezek x_1 és x_2. Határozza meg az x_1 és x_2 metszéspontok között az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai által közrefogott síkrész területét!
Megoldás: $\sin x=\cos x$ esetén $\operatorname{tg}x=1$, ezért $x_1=\frac{\pi}{4}$ és $x_2=\frac{5\pi}{4}$. **3p** Tehát

$$\text{terület}\overset{\mathbf{2p}}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sin x-\cos x dx=[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=-\cos\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4}-(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2} \quad \mathbf{5p}$$

9. Határozza meg, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyik konvergens és melyik divergens! Amelyik konvergens, annak határozza meg az értékét!

   (a) *(5 pont)* $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$
   Megoldás:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx\overset{\mathbf{2p}}{=}\lim_{c\to 0+}\int_c^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{c\to 0+}\int_c^1 x^{-1/2}dx\overset{\mathbf{1p}}{=}\lim_{c\to 0+}[\frac{x^{1/2}}{1/2}]_c^1=\lim_{c\to 0+}2-2\sqrt{c}=2, \mathbf{1p}$$

   tehát konvergens. **1p**

(b) *(5 pont)* $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$

Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{d\to 1-}\int_0^d \frac{1}{1-x}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{d\to 1-}[\frac{\ln|1-x|}{-1}]_0^d = \lim_{d\to 1-} -\ln(1-d)-(-\ln 1) = +\infty, \quad \mathbf{1p}$$

tehát divergens **1p**

10. (BÓNUSZ) *(10 pont)* Tegyük fel, hogy a $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ harmadfokú, valós együtthatós polinomra teljesül, hogy $a_0 > 0$, $a_3 > 0$, $p(-2024) < 0$ és $p(2025) < 0$. Hány különböző valós gyöke van $p(x)$-nek?

Megoldás: Mivel $a_0 > 0$, ezért $p(0) = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3 > 0$, így a Bolzano tétel szerint van gyök a $]-2024, 0[$ és $]0, 2025[$ intervallumokban. **6p** Mivel $a_3 > 0$, ezért $\lim_{x\to\infty} p(x) = +\infty$, ezért létezik $x_0 > 2025$, amire $p(x_0) > 0$, így ismét csak a Bolzano tétel szerint van gyök az $]2025, +\infty]$ félegyenesen. **3p** Tehát legalább 3 valós gyök van. Egy harmadfokú polinomnak pedig legfeljebb 3 különböző gyöke lehet **1p**, mert, ha x_1 gyök, akkor $p(x) = q(x)(x-x_1) + c_1$ polinomosztásnál $0 = p(x_1) = q(x_1)(x_1 - x_1) + c_1$, tehát $c_1 = 0$, azaz $p(x) = q(x)(x-x_1)$ egy alkalmas másodfokú $q(x)$ polinommmal. Ha még x_2 és x_3 gyökök, akkor ezek $q(x)$-nek gyökei, ezért $q(x) = a_3(x-x_2)(x-x_3)$, tehát $p(x) = a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, így nincs további gyök. Tehát pontosan 3 gyök van.