Zh-k összpontszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Név: Neptun kód: Előadó monogramja:

ÉMK és KJK Matematika A1 vizsga, 2025. január 14.

Munkaidő: 100 perc, a 6-9 feladatokból el kell érni 30%-ot.

1. (a) *(3 pont)* Definiálja, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok skaláris szorzatát!
Megoldás: Legyen az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok által bezárt szög γ. Ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok skaláris szorzata $\underline{ab} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\gamma$. **3p**

   (b) *(3 pont)* Adja meg az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok skaláris szorzatának kiszámítási módját!
Megoldás: Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok skaláris szorzatának kiszámolása: $\underline{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. **3p**

   (c) *(3 pont)* Határozza meg az $\underline{a} = (1, 2, 3)$ és $\underline{b} = (-1, 0, 2)$ térvektorok által bezárt szöget!
Megoldás:

$$\cos\gamma \stackrel{\mathbf{1p}}{=} \frac{\underline{ab}}{|\underline{a}||\underline{b}|} \stackrel{\mathbf{1p}}{=} \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{5}} \Rightarrow \gamma = 53,3^\circ \quad \mathbf{1p}$$

2. (a) *(4 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény x_0 helyen folytonos!
Megoldás: Az $f(x)$ függvény folytonos az x_0 helyen, ha létezik az $f(x_0)$, létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ határérték és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. **4p**

   (b) *(4 pont)* Írja le az $[a, b]$ integvallumon folytonos függvényekre vonatkozó Bolzano-tételt!
Megoldás: Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumban, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket felvesz $[a, b]$-ben. **4p**

   (c) *(4 pont)* Igaz-e, hogy az $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}-1}{2x} & \text{ha } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 0, \end{cases}$ függvény minden valós x_0 esetén folytonos?
Megoldás: A L'Hospital szabály szerint

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x}}{2} \stackrel{\mathbf{3p}}{=} -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2},$$

ezért $x_0 = 0$-ban $f(x)$ nem folytonos, így nem igaz, hogy minden valós x_0 esetén folytonos az $f(x)$. **1p**

3. (a) *(3 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény primitív függvényét!
Megoldás: Az $f(x)$ függvény primitív függvénye a $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$. **3p**

   (b) *(3 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény határozatlan integrálját!
Megoldás: Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmaza az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja. Jelölés: $\int f(x)dx$. **3p**

   (c) *(3 pont)* Irja le a folytonos $f(x)$, $a \leq x \leq b$ függvényre vonatkozó Newton-Leibniz tételt!
Megoldás: Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a, b]$-ben. Legyen $f(x)$ egy primitív függvénye $F(x)$. Ekkor $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. **3p**

4. *(10 pont)* Határozza meg, hogy a $z^4+4=0$ egyenlet gyökeinek algebrai alakját a komplex számok között!
Megoldás:

$$z^4=-4 \overset{\mathbf{3p}}{=} 4(\cos\pi+i\sin\pi) \Rightarrow z=4^{1/4}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}),\quad k=0,1,2,3 \quad \mathbf{3p}$$

$$k=0: \quad 4^{1/4}(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})=1+i \quad \mathbf{1p}$$

$$k=1: \quad 4^{1/4}(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4})=-1+i \quad \mathbf{1p}$$

$$k=2: \quad 4^{1/4}(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4})=-1-i \quad \mathbf{1p}$$

$$k=3: \quad 4^{1/4}(\cos\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4})=1-i \quad \mathbf{1p}$$

5. *(10 pont)* Határozza meg, hogy az $f(x)=x^4-4x^3-48x^2+34x-6$ függvény hol konvex illetve konkáv!
Megoldás:

$$f'(x)=4x^3-12x^2-96x+34 \Rightarrow f''(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} 12x^2-24x-96=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=4 \quad \mathbf{2p}$$

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<4$	$x=4$	$x>4$	
$f''(x)$	$+$	0	-	0	$+$	**5p**
$f(x)$	konvex	infl. p.	konkáv	infl. p.	konvex	

6. *(10 pont)* Határozza meg az $\int \frac{54x+7}{1+9x^2}dx$ integrált!
Megoldás:

$$\int \frac{54x+7}{1+9x^2}dx=\int 3\frac{18x}{1+9x^2}+7\frac{1}{1+(3x)^2}dx = \overset{\mathbf{5p}}{3\ln(1+9x^2)}+7\frac{\overset{\mathbf{5p}}{arctg 3x}}{3}+c$$

7. *(10 pont)* Határozza meg az $\int\cos\sqrt{2x+2}dx$ integrált! Segítség: használjon $t=\sqrt{2x+2}$ helyettesítést.
Megoldás: Ha $t=\sqrt{2x+2}$, akkor $t^2=2x+2$, ezért $x=\frac{1}{2}t^2-1$, így $dx=tdt$ **2p**. Ez alapján parciálisan integrálva $u=t$, $v'=\cos t$, tehát $u'=1$, $v=\sin t$-vel

$$\int\cos\sqrt{2x+2}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \int\cos t\cdot tdt \overset{\mathbf{2p}}{=} t\sin t-\int\sin tdt \overset{\mathbf{2p}}{=} t\sin t+\cos t+c \overset{\mathbf{2p}}{=} \sqrt{2x+2}\sin\sqrt{2x+2}+\cos\sqrt{2x+2}+c$$

8. *(10 pont)* Határozza meg az $f(x)=x^2$ és $g(x)=5x-6$ függvények grafikonjai által közrefogott síkrész területét!
Megoldás: Ha $x^2=5x-6$, akkor $x^2-5x+6=0$, ezért $x_1=2$ és $x_2=3$. **3p** Így

$$\text{terület} \overset{\mathbf{2p}}{=} \int_2^3 5x-6-x^2dx=[\frac{5x^2}{2}-6x-\frac{x^3}{3}]_2^3=\frac{45}{2}-18-9-(10-12-\frac{8}{3})=\frac{1}{6} \quad \mathbf{5p}$$

9. Határozza meg, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyik konvergens és melyik divergens! Amelyik konvergens, annak határozza meg az értékét!
Megoldás:

   (a) *(5 pont)* $\int_1^\infty \frac{1}{2x+3}dx$
   Megoldás:

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x+3}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{2x+3}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{b\to\infty}[\frac{1}{2}\ln(2x+3)]_1^b=\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{2}\ln(2b+3)-\frac{1}{2}\ln 5)=+\infty \quad \mathbf{1p},$$

   tehát divergens. (**1p**)

(b) ***(5 pont)*** $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+2x+1}dx$
Megoldás:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+2x+1}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{(1+x)^2}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{b\to\infty}[\frac{-1}{1+x}]_1^b = \lim_{b\to\infty}(\frac{-1}{1+b}-\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \mathbf{1p},$$

tehát konvergens. (1p)

10. (BÓNUSZ)

(10 pont) Legyen az $f(x) > 0$, $a \leq x \leq b$ olyan függvény, hogy $f'(x)$ folytonos. Legyen $g(x) = 2f(x)$, $a \leq x \leq b$. Forgassuk meg az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonját az x tengely körül. Mi az $f(x)$ által generált forgásfelület, ha a felszíne pontosan kétszer akkor mint a $g(x)$ által generált felszín?
Megoldás: Az $f(x)$ által generált forgástest felszíne:

$$A_f = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx,$$

a $g(x)$ által generált forgástest felszíne:

$$A_g = 2\pi\int_a^b g(x)\sqrt{1+g'(x)^2}dx = 2\pi\int_a^b 2f(x)\sqrt{1+4f'(x)^2}dx. \quad \mathbf{2p}$$

Ha $A_g = 2A_f$, akkor

$$2\pi\int_a^b 2f(x)\sqrt{1+4f'(x)^2}dx = 2\cdot 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx = \int_a^b f(x)\sqrt{1+4f'(x)^2}dx, \quad \mathbf{3p}$$

ami csak úgy lehet, ha $f'(x) = 0$ minden $a \leq x \leq b$ **3p**, ezért létezik $c > 0$, hogy $f(x) = c > 0$, $a \leq x \leq b$, így az $f(x)$ által generált felület egy henger. **2p**