1. Definíció. *Legyen az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok által bezárt szög γ. Ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok skaláris szorzata $\underline{ab} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\gamma$.*

1. Állítás. *Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok skaláris szorzatának kiszámolása: $\underline{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.*

2. Állítás. *Az $\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$ térvektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\underline{ab} = 0$.*

2. Definíció. *Legyen az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok által bezárt szög γ. Ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok vektoriális szorzata a $\underline{0}$, ha $|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \sin\gamma = 0$; egyébként az az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, amire teljesül, hogy*

1. $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \sin\gamma$,
2. $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$,
3. $\underline{a}$, $\underline{b}$ *és* $\underline{a} \times \underline{b}$ *jobbsodrású rendszert alkot.*

3. Állítás. *Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok vektoriális szorzatának kiszámolása: $\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.*

3. Definíció. *Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ térvektorok vegyesszorzata: $\underline{abc} = (\underline{a} \times \underline{b})\underline{c}$.*

4. Állítás. *Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ térvektorok álltlal meghatározott paralelepipedon térfogata: $V = |\underline{abc}|$*

5. Állítás. *Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ térvektorok vegyesszorzatának kiszámolása: $\underline{abc} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$.*

4. Definíció. *Az a_n sorozat monoton nő, ha $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$, azaz $a_n \leq a_{n+1}$, ha n pozitív egész. Az a_n sorozat monoton csökken, ha $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \leq \ldots$, azaz $a_n \geq a_{n+1}$, ha n pozitív egész.*

5. Definíció. *Az a_n sorozat alulról korlátos, ha létezik egy K, hogy minden pozitív egész n esetén $K \leq a_n$. Az a_n sorozat felülről korlátos, ha létezik egy L, hogy minden pozitív egész n esetén $a_n \leq L$. Az a_n sorozat korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.*

6. Definíció. *Az a_n sorozat határértéke a A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ estén létezik N, hogy ha $n \geq N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.*

7. Definíció. *Az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett határértéke a A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

8. Definíció.

1. *Az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett baloldali határértéke a B valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $x_0 - \delta < x < x_0$, akkor $|f(x) - B| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$.*
2. *Az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett jobboldali határértéke a J valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$, akkor $|f(x) - J| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$.*

9. Definíció. *Az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett határértéke a $+\infty$, ha minden L valós esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > L$.*

10. Definíció. *Az $f(x)$ függvény $+\infty$-ben vett határértéke a A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik M, hogy ha $x > M$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

11. Definíció. *Az $f(x)$ függvény folytonos az x_0 helyen, ha*

1. *létezik az $f(x_0)$,*

2. *létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ határérték*

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

1. Tétel (Bolzano tétel)**.** *Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumban, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket felvesz $[a,b]$-ben.*

12. Definíció. *Az $f(x)$ függvény differenciálható az x_0-ban, ha létezik a $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ véges határérték. Jelölés: $f'(x_0)$.*

6. Állítás. *Az $f(x)$ függvény x_0-ban vett differenciálhatóságának geometriai jelentése az, hogy az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzható érintő. Ekkor az érintő meredeksége az $f'(x_0)$.*

2. Tétel (Rolle-féle középérték tétel)**.** *Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvényre teljesül, hogy*

1. *folytonos a zárt $[a,b]$ intervallumban,*

2. *differenciálható a nyílt $]a,b[$ intervallumban,*

3. $f(a) = f(b)$.

Ekkor létezik egy $a < c < b$ valós szám, amire $f'(c) = 0$.

3. Tétel (Lagrange-féle középérték tétel)**.** *Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvényre teljesül, hogy*

1. *folytonos a zárt $[a,b]$ intervallumban,*

2. *differenciálható a nyílt $]a,b[$ intervallumban,*

Ekkor létezik egy $a < c < b$ valós szám, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

13. Definíció. *Az $f(x)$ függvény az I intervallumban vagy félegyenesen vagy a valós számokon monoton nő, ha $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$. Az $f(x)$ függvény az I intervallumban vagy félegyenesen vagy a valós számokon monoton csökken, ha $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

4. Tétel. *Az $f(x)$ függvény az I intervallumban vagy félegyenesen vagy a valós számokon monoton nő, ha $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$ esetén. Az $f(x)$ függvény az I intervallumban vagy félegyenesen vagy a valós számokon monoton csökken, ha $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén.*

14. Definíció. *Az $f(x)$ függvény az I intervallumban vagy félegyenesen vagy a valós számokon konvex, ha ott bármelyik húr az $f(x)$ grafikonja felett van. Az $f(x)$ függvény az I intervallumban vagy félegyenesen vagy a valós számokon konkáv, ha ott bármelyik húr az $f(x)$ grafikonja alatt van.*

5. Tétel. *Az $f(x)$ függvény az I intervallumban vagy félegyenesen vagy a valós számokon konvex, ha $f''(x) \geq 0$, minden $x \in I$. Az $f(x)$ függvény az I intervallumban vagy félegyenesen vagy a valós számokon konkáv, ha $f''(x) \leq 0$, minden $x \in I$.*

15. Definíció. *Az $f(x)$ függvény primitív függvénye a $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$.*

6. Tétel.

1. *Ha $F(x)$ az $f(x)$ egy primitív függvény, akkor minden c valós szám esetén $F(x)+c$ is primitív függvény.*

2. *Ha $F(x)$ és $G(x)$ az $f(x)$ két primitív függvénye, akkor létezik c valós szám, hogy $G(x) = F(x) + c$.*

16. Definíció. *Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmaza az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja. Jelölés: $\int f(x)dx$.*

17. Definíció. *Legyen $a < b$, $a = x_0 < x_1 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ekkor ha a $\lim_{n\to\infty, max_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ véges határérték létezik az x_i osztópontok és ξ_i választásától függetlenül, akkor azt az $f(x)$ függvény $[a, b]$-ben vett határozott integráljának (vagy Riemann-integráljának) hívjuk. Jelölés $\int_a^b f(x)dx$.*

7. Állítás. *Az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál az $f(x)$ függvény grafikonja és az x tengely közötti rész előjeles területét számolja ki, azaz az x tengely feletti részt $+$-szal, az alattta lévő részt $-$-szal veszi figyelembe.*

7. Tétel. *Ha $f(x)$ függvény korlátos az $[a, b]$-ben és véges sok pontot leszámítva folytonos ott. Ekkor létezik az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál.*

8. Tétel (Newton-Lebniz). *Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a, b]$-ben. Legyen $f(x)$ egy primitív függvénye $F(x)$. Ekkor $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

18. Definíció.

1. *Legyen $B \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy minden $a < B$ esetén létezik az $\int_a^B f(x)dx$ határozott integrál. Az $f(x)$ függvény $[-\infty, B]$-ban vett improprius integrálja a $\lim_{a\to-\infty} \int_a^B f(x)dx$ véges határérték, ha ez létezik.*
2. *Legyen $A \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy minden $A < b$ esetén létezik az $\int_A^b f(x)dx$ határozott integrál. Az $f(x)$ függvény $[A, +\infty,]$-ban vett improprius integrálja a $\lim_{b\to+\infty} \int_A^b f(x)dx$ véges határérték, ha ez létezik.*
3. *Tegyük fel, hogy minden $a < b$ esetén létezik az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál. Az $f(x)$ függvény $[-\infty, +\infty,]$-ban vett improprius integrálja a $\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ véges határérték, ha ez létezik, ahol $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ egymástól függetlenül történik.*

19. Definíció.

1. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos az $]a, b]$ balról nyílt, jobbról zárt integrvallumban és $f(x)$ nem korlátos, ha $x \to a+$. Ekkor az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál a $\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$, ha ez a véges határérték létezik.*
2. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos az $[a, b[$ balról zárt, jobbról nyílt integrvallumban és $f(x)$ nem korlátos, ha $x \to b-$. Ekkor az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál a $\lim_{d\to b-} \int_a^d f(x)dx$, ha ez a véges határérték létezik.*
3. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos az $]a, b[$ nyílt integrvallumban és $f(x)$ nem korlátos, ha $x \to a+$ és $x \to b-$. Ekkor az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál a $\lim_{a\to c+, d\to b-} \int_c^d f(x)dx$, ha ez a véges határérték létezik.*

4. Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos az $[a, c[\cup]c, b]$-ben és nem korlátos, ha $x \to c$. Ekkor $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$