

Determinánsok

(1)

Oldjuk meg az alábbi két ismeretlen és két egyenletet tartalmazó lineáris egyenletrendszert:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Szorozzuk meg a_{22} -vel az első egyenletet és a_{12} -vel a másodikot:

$$a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_1a_{22}$$

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}$$

Vonjuk ki az első a másodikból:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Hasonlóan: $x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Ha az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

egyenletet oldjuk meg, ahhoz

$$x_3 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + b_3a_{12}a_{21} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Próbáljuk meginteni a nevezőt! A determináns egyenlősen kifejezhető:

$$a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}$$

a hárommértékűben háromtagú mőrtok mőpelük:

(2.)

$$a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$a_{12} a_{23} a_{31}$$

$$a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$a_{11} a_{23} a_{32}$$

$$a_{12} a_{21} a_{33}$$

Egy mőrtokban az első indexek: 1, 2 illetve 1, 2, 3, a

második indexek:

1, 2

2, 1

illetve

1, 2, 3

2, 3, 1

3, 1, 2

3, 2, 1

1, 3, 2

2, 1, 3

tehát az összes permutáció jelenik meg. Így természetesen azt
gondolni, hogy az

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

;

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

egyenletrendszer megoldásánál az x_i egy tört, ahol a nevezőben
n tőgyűös mőrtok jelenik meg, amikben az indexek az
első mőrtok: 1, 2, ..., n, míg a második mőrtokban az

1, 2, ..., n összes permutációi mőpelnek.

Igy kell írniuk a mőrtok előjelét.

Def Legyen az $1, 2, \dots, n$ számok egy permutációja: $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$. (3)

És ha ebben a permutációban $\sigma(i)$ párba kerül $\sigma(j)$ -vel, ahol a nagyobb szám van elől, az permutáció inverziószámának hívjuk. Jelölés: $I(\sigma)$.

$n=2$:

σ	$I(\sigma)$	előjel
1, 2	0	+
2, 1	1	-

$n=3$

σ	$I(\sigma)$	előjel
1, 2, 3	0	+
1, 3, 2	1	-
2, 1, 3	1	-
2, 3, 1	2	+
3, 1, 2	2	+
3, 2, 1	3	-

Úgyh, hogy ha az inverziószám páros, akkor + az előjel, ha páratlan, akkor - az előjel. Tehát az előjel $(-1)^{I(\sigma)}$.

Def Legyen $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Az $\underline{A}$ determinánsa:

$$\det \underline{A} = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

$\nwarrow$
 $1, 2, \dots, n$ összes permutációját vesszük

Másik jelölés:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pl. 1. $n=2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(4.)

2. $n=3$

Sarrus

~~Sarrus~~

másképp

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

3. Ha a főátló alatt csak 0-k vannak:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Mikor lesz $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)} \neq 0$

$$a_{n\sigma(n)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(n) = n$$

$$a_{n-1\sigma(n-1)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(n-1) = n-1 \Rightarrow \sigma(n-1) = n-1$$

$\vdots$

$$a_{1\sigma(1)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(1) = 1$$

Tehát $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) = (1, 2, \dots, n)$. Ekkor az

inverziónum = 0. Így most $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

Ilyen mátrixot a Gauss-eliminációval kezelhetjük. Nézzük meg, hogy a Gauss-elimináció lépései milyen hatással vannak a determinánusra!

(5)

Pl. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. $\Sigma(\text{hor} \mid \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 10$.

1. Sorok: $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10$

(-1) - sorok változta determináns.

2. Pl. 3-mal szorozva a 2. sort:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - (-12) = 30$$

3-mal szorozott a determináns

3. Az első sorhoz hozzáadjuk a 2. sor dupláját:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - (-10) = 10$$

Nem változott a determináns

Tétel 1. Ha egy $n \times n$ -es mátrixban soroként hajtunk végre,
 (-1)-szorozást
 akkor ~~nem változik~~ a determináns értéke

2. Ha egy $n \times n$ -es mátrixban egy sort c -vel szorzunk,
 akkor a determináns is c -vel szorzódik.

3. Ha egy sorból kivonjuk egy másik sor valahány-szorosát,
 akkor nem változik a determináns értéke.

Pl. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-7) = -21$$

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy a mátrixműveletek a determinánsra milyen hatással vannak: legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \underline{A} = -2, \quad \det \underline{B} = -11$$

$$\det \underline{A}^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 = \det \underline{A}$$

$$\det(\underline{A} + \underline{B}) = \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -50$$

$$\underline{A}\underline{B}: \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(\underline{A}\underline{B}) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 19 \end{vmatrix} = 22 = (-2)(-11) = (\det \underline{A})(\det \underline{B})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1}: \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \det \underline{A}^{-1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\det \underline{A}}$$

Tétel Legyen $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, $\underline{B} = (b_{ij})_{n \times n}$. Ekkor

1. $\det \underline{A}^T = \det \underline{A}$

2. $\det(\underline{A}\underline{B}) = (\det \underline{A})(\det \underline{B})$

3. ha $\underline{A}$ invertálható, akkor $\det \underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}}$

Mikor invertálható az $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix?

Ha invertálható, akkor létezik $\underline{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, amire

$$\underline{A}\underline{A}^{-1} = \underline{I}_n$$

$$\det \underline{I}_n = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1 \quad \left\{ \Rightarrow 1 = \det \underline{I}_n = \det(\underline{A}\underline{A}^{-1}) = (\det \underline{A})(\det \underline{A}^{-1}) \Rightarrow \det \underline{A} \neq 0 \right.$$

Megmutatható

(7.)

Tétel Az $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ akkor és csak akkor invertálható, ha $\det \underline{A} \neq 0$.

Ha az $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrix i -edik sorát és j -edik oszlopát elhagyjuk, akkor egy $(n-1) \times (n-1)$ -es matrixot kapunk.

Eznek determinánsa: M_{ij} (aldetermináns)

$n=3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

Előjelek aldetermináns: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Tehát:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Kifejtési tétel: Legyen $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$.

1, i -edik sor menti kifejtés:

$$\det \underline{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

2, j -edik oszlop menti kifejtés:

$$\det \underline{A} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$

Pl.
$$\begin{vmatrix} +3 & 6 & 9 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
 2. sor ment
kifejtve
$$= - (3) \begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \left(6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \right) - 2 \left(3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_0 \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_1 \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{-2} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_1 \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_1$

$$= -45 - 12 = -57$$

Ezre kifejtési tétel: Legyen $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, $i \neq j$. Ekkor

$$a_{i1} C_{j1} + a_{i2} C_{j2} + \dots + a_{in} C_{jn} = 0.$$

Def Az $\underline{A} = (a_{ij})$ matrix adjungáltját úgy kapjuk,
hogy minden komponens helyett vesszük a hozzá tartozó előjeles
aldetermináns, majd transzponálunk, azaz

$$\text{adj } \underline{A} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & & C_{nn} \end{pmatrix} \quad j\text{-edik oszlop)$$

$$\underline{A} \cdot \text{adj } \underline{A} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ \vdots \\ C_{jn} \end{pmatrix}$$

i -edik sor $\rightarrow$

$$a_{i1} C_{j1} + a_{i2} C_{j2} + \dots + a_{in} C_{jn} = \begin{cases} \det \underline{A}, & \text{ha } i=j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

(9)

Teljesen $\underline{A} \operatorname{adj} \underline{A} = \begin{pmatrix} \det \underline{A} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det \underline{A} \end{pmatrix} = (\det \underline{A}) \underline{I}_n$

Jegyzet $\underline{A} \left(\frac{1}{\det \underline{A}} \operatorname{adj} \underline{A} \right) = \underline{I}_n$, teljesen ha $\det \underline{A} \neq 0$, akkor

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \operatorname{adj} \underline{A}.$$

Ummatározni a lineáris egyenletrendsere:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Együttes mátrix: $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Az ismeretlenek oszlopvektora: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

A jobb oldal oszlopvektora: $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Az egyenlet mátrixos alakja: $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$. Ha $\underline{A}$ invertálható, akkor

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b} = \left(\frac{1}{\det \underline{A}} \operatorname{adj} \underline{A} \right) \underline{b}$$

$\operatorname{adj} \underline{A} \cdot \underline{b}$:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 c_{11} + b_2 c_{21} + \dots + b_n c_{n1} \\ b_1 c_{12} + b_2 c_{22} + \dots + b_n c_{n2} \\ \vdots \\ b_1 c_{1n} + b_2 c_{2n} + \dots + b_n c_{nn} \end{pmatrix}$$

Tehát

$$\underline{x} = \frac{1}{\det \underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \underline{A}} (\text{adj } \underline{A} \cdot \underline{b}) = \begin{pmatrix} \frac{b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \dots + b_n C_{n1}}{\det \underline{A}} \\ \frac{b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \dots + b_n C_{n2}}{\det \underline{A}} \\ \vdots \\ \frac{b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \dots + b_n C_{nn}}{\det \underline{A}} \end{pmatrix}$$

(10)

Tehát $x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}}{\det \underline{A}}$

Mivel egyenlő a mátrixok? Jelölje $\underline{A}_j$ ezt a mátrixot, amit úgy kapunk, hogy $\underline{A}$ -ban a j -edik oszlopot $\underline{b}$ -re cseréljük:

$$\underline{A}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Figyelem! $\underline{A}_j$ determinánsa a j -edik oszlop szerint:

$$\det \underline{A}_j = b_1 C_{1j}' + b_2 C_{2j}' + \dots + b_n C_{nj}'$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Mivel $\underline{A}$ és $\underline{A}_j$ csak a j -edik oszlopban különbözik, ezért ha $C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{nj}$ -vel jelöljük az $\underline{A}$ mátrix j -edik oszlopához tartozó előjeles aldeterminánsokat, akkor

$$C_{1j} = C_{1j}', C_{2j} = C_{2j}', \dots, C_{nj} = C_{nj}'. \text{ Tehát}$$

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}}{\det A} = \frac{b_1 C_{1j}' + b_2 C_{2j}' + \dots + b_n C_{nj}'}{\det A} = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

Cramer-metódy: Legyen az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

lineáris egyenletrendszer olyan, hogy az $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

egyetlenértékű mátrix, azaz $\det A \neq 0$.

Legyen $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, az A_j mátrixot úgy kapjuk, hogy A -ban a j -edik oszlopot $\underline{b}$ -re cseréljük. Ekkor $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$, ha $1 \leq j \leq n$.

Pl. $x + 3y = 11$

$$2x - 4y = -8$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -8 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-44 - (-24)}{-4 - 6} = \frac{-20}{-10} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-8 - 22}{-4 - 6} = \frac{-30}{-10} = 3$$

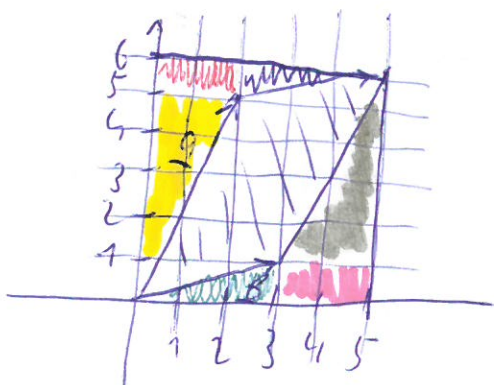
A determináns geometriai jelentése:

(12)

$n=2$ dimenzió: Az $\underline{a}=(a_1, a_2)$, $\underline{b}=(b_1, b_2)$ által meghatározott paralelogramma terület:

$$\text{ter} = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right| \leftarrow \text{abszolút érték}$$

Pl. $\underline{a}=(2, 5)$, $\underline{b}=(3, 1)$

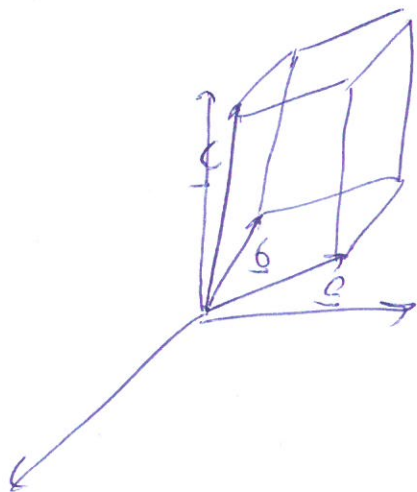


$$\text{ter} = \left| \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right| = |2 - 15| = |-13| = 13$$

Valóban:

$$\text{ter} = 5 \cdot 6 - \frac{3}{2} - 2 - 5 - 5 - 2 - \frac{3}{2} = 13.$$

$n=3$ dimenzió: Az $\underline{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b}=(b_1, b_2, b_3)$ és $\underline{c}=(c_1, c_2, c_3)$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata:



$$V = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right| \leftarrow \text{abszolút érték}$$