Fourier-sorok

Tudjuk: $\sin x$ és $\cos x$ 2π-szerint periodikus fvek (azaz $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$). Sőt ha k egy pozitív egész szám, akkor $\sin(kx)$ és $\cos(kx)$ is 2π-szerint periodikus fvek, mert $\cos(k(x+2\pi))=\cos(kx+2k\pi)=\cos(kx)$.

Általában, ha $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$ esetén az

$$a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+$$
$$\ldots+(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+\ldots=$$
$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

fsort vesszük, akkor ez a KT-on 2π szerint periodikus fv lesz.

Feladat: Legyen $f(x)$ egy 2π-szerint periodikus fv. Adjunk meg olyan $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ valós számokat, hogy

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Feltesszük, hogy $f(x)$ egy szép fv az analízis szempontjából.

Ekkor

$$\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_0^{2\pi}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,dx=$$

$$\left[a_0x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\frac{\sin kx}{k}-b_k\cdot\frac{\cos kx}{k}\right)\right]_0^{2\pi}=2\pi a_0 \Rightarrow a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx.$$

$\sin kx$, $\cos kx$ 2π-szerint periodikus fvek

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi}\left(a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)\cos nx\,dx =$$

$$\int_0^{2\pi} a_0\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx\cos nx + b_k\sin kx\cdot\cos nx\,)\,dx =$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right) \Rightarrow$$

$$\cos kx\cos nx = \frac{1}{2}\cos((k+n)x) + \frac{1}{2}\cos(n-k)x$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right) \Rightarrow$$

$$\sin kx\cos nx = \frac{1}{2}\sin(k+n)x + \frac{1}{2}\sin(k-n)x$$

$$= \int_0^{2\pi} a_0\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\left(\tfrac{1}{2}\cos(k+n)x+\tfrac{1}{2}\cos(k-n)x\right) +$$
$$b_k\left(\tfrac{1}{2}\sin(k+n)x+\tfrac{1}{2}\sin(k-n)x\right)\Big)\,dx \overset{\circledast}{=}$$

Ha $n\neq k$, akkor $\int\cos(k-n)dx = \dfrac{\sin(k-n)x}{k-n}+c$

$$\int\sin(k-n)dx = -\frac{\cos(k-n)x}{k-n}+c$$

Ha $n=k$, akkor $\cos(k-n)x=\cos(0x)=1$, ezért

$$\int\cos(k-n)x\,dx = \int 1\,dx = x+C$$

és

$\sin(k-n)x = \sin(0x) = 0$, ezért

$$\int\sin(k-n)x\,dx = \int 0\,dx = C$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\circledast \int_0^{2\pi} a_0\cos nx + \sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\Big(a_k\left(\tfrac{1}{2}(\cos(k+n)x+\tfrac{1}{2}\cos(k-n)x\right) +$$

$$+b_k\left(\tfrac{1}{2}\sin(k+n)x+\tfrac{1}{2}\sin(k-n)x\right)\Big) + a_n\left(\tfrac{1}{2}\cos 2nx+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$+b_n\left(\tfrac{1}{2}\sin 2nx + 0\right)\,dx =$$

$$= \Bigg[a_0 \cdot \frac{\sin nx}{n} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty} \Bigg(a_k \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{1}{2} \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \right) +$$

$$b_k \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(k+n)x}{k+n}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(k-n)x}{k-n}\right)\right)\Bigg) +$$

$$a_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2nx}{2n} + \frac{1}{2} a_n x + b_n \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2nx}{2n}\right)\Bigg]_0^{2\pi} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} a_n 2\pi$$

Mivel $\sin(k+n)x, \sin(k-n)x, \cos(k+n)x, \cos(k-n)x, \sin 2nx, \cos 2nx$ 2π szerint periodikus fgvk

$$\Rightarrow a_n \pi = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

Hasonlóan kiszámolható: $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

Def Az $f(x)$ 2π- szerint periodikus fv Fourier-sora:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

ahol $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

Pl. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ 5, & \text{ha } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1 dx + \int_{\pi}^{2\pi} 5 \, dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left([x]_0^{\pi} + [5x]_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}(\pi - 0 + 10\pi - 5\pi) = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 5 \cdot \cos nx \, dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} + \left[5 \cdot \frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\sin 0}{n} +\right.$$

$$\left. 5 \cdot \frac{\sin 2n\pi}{n} - 5 \cdot \frac{\sin n\pi}{n}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\,dx + \int_\pi^{2\pi} 5\cdot\sin nx\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \left[-5\cdot\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\overset{(-1)^n}{\cos n\pi}}{n} - \left(-\frac{\overset{1}{\cos 0}}{n}\right) + -5\cdot\frac{\overset{1}{\cos 2n\pi}}{n} - \left(-5\cdot\frac{\overset{(-1)^n}{\cos n\pi}}{n}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{-4+4(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{8}{n\pi} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Tehát $b_1 = -\frac{8}{\pi}$, $b_3 = -\frac{8}{3\pi}$, $b_5 = -\frac{8}{5\pi}$, ... így a Fourier-sor:

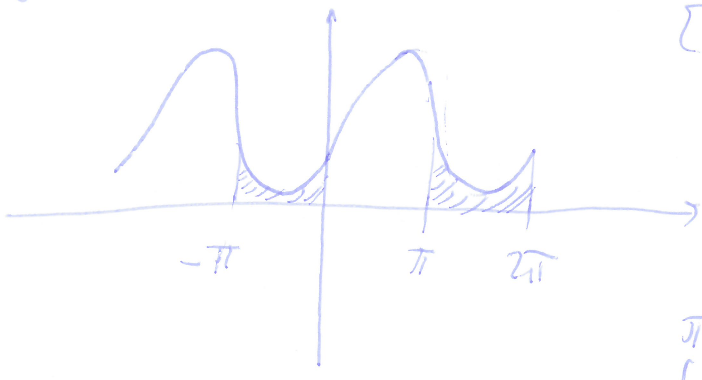
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) =$$

$$3 - \frac{8}{\pi}\sin x - \frac{8}{3\pi}\sin 3x - \frac{8}{5\pi}\sin 5x - \dots$$

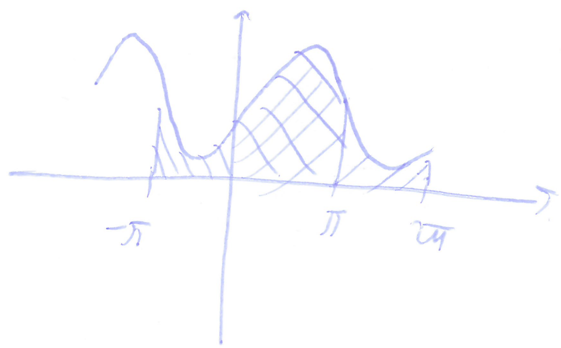
Páros és páratlan fvek Fourier-sora

Ha $g(x)$ egy 2π szerint periodikus fv, akkor

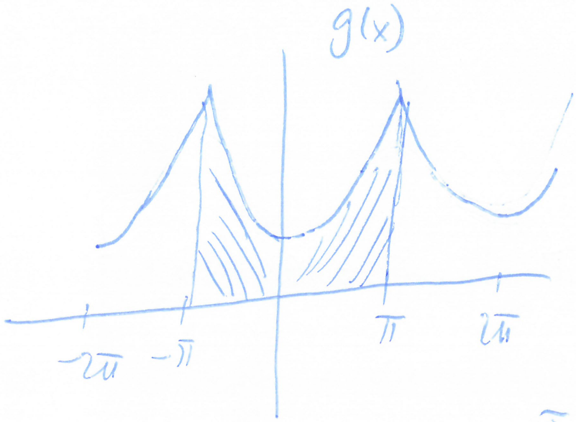
[akkor $\int_{\pi}^{2\pi} g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} g(x)\,dx$, így



$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} g(x)\,dx$$



Ha $g(x)$ így páros fv, azaz a grafikonja az y tengelyre szimmetrikus



[Akkor $\int_{-\pi}^{0} g(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} g(x)\,dx$,

így

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$f(x)$ és $\cos nx$ páros fvek $\Rightarrow$ $f(x)\cos nx$ is páros fv $\Rightarrow$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

Ha $h(x)$ így páratlan fv, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,dx = 0$$

Ha $f(x)$ páros, akkor mivel $\sin nx$ páratlan

$(\sin(n(-x)) = \sin(-nx) = -\sin(nx))$, ezért $f(x)\sin nx$

is páratlan, így

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{ptlan}}\,dx = 0.$$

Tehát ha $f(x)$ páros, akkor $b_n=0$,

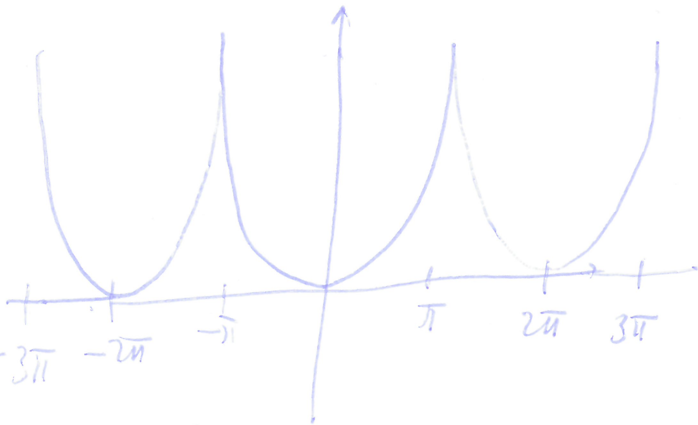
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

Hasonlóan kapjuk: ha $f(x)$ páratlan fv, akkor $a_0=0$, $a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Pl. 1. $f(x)=x^2$, $-\pi\le x\le\pi$ 2π szerint periodikus fv Fourier-so

$f(x)$ páros $\Rightarrow b_n=0$



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{u}{x^2}\,\underset{v'}{\cos nx}\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\cdot\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\underset{u}{2x}\cdot\underset{v'}{\frac{\sin(nx)}{n}}\,dx\right)=$$

$$u'=2x \quad v=\frac{\sin nx}{n} \qquad\qquad u'=2 \quad v=-\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\pi^2\cdot\frac{\overset{0}{\sin n\pi}}{n}-0^2\cdot\frac{\overset{0}{\sin 0}}{n}-\left(\left[-2x\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-2\,\frac{\cos nx}{n^2}\,dx\right)\right)=$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\left(-2\pi\cdot\frac{\cos n\pi}{n^2}-\left(-2\cdot 0\cdot\frac{\cos 0}{n^2}\right)\right)+\left[2\,\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi}\right)=$$

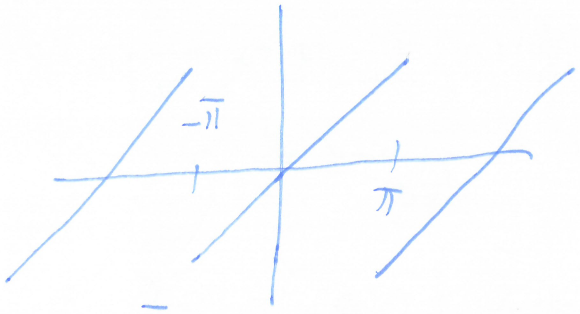
$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}-\left(2\cdot\frac{\sin n\pi}{n^2}-2\cdot\frac{\sin 0}{n^3}\right)\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Tehát $a_1=-4$, $a_2=1$, $a_3=-\frac{4}{9}$, $a_4=\frac{4}{16}$, ... a Fourier-sor

$$\frac{\pi^2}{3}-4\cos x+\cos 2x-\frac{4}{9}\cos 3x+\frac{4}{16}\cos 4x-+\dots$$

2. $f(x)=x$, ha $-\pi<x<\pi$ 2π szerint periodikus

páratlan $\Rightarrow$ $a_0=0$, $a_n=0$



$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{u}{x}\,\underset{v'}{\sin nx}\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\left[-x\,\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\frac{\cos nx}{n}\,dx\right)=$$

$u'=1$ $v=-\frac{\cos nx}{n}$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\pi\cdot\frac{\cos n\pi}{n}-\left(-0\cdot\frac{\cos 0}{n}\right)+\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}\right)=$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{n}+\frac{\sin n\pi}{n}-\frac{\sin 0}{n}\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Tehát $b_1=2$, $b_2=-1$, $b_3=\frac{2}{3}$, $b_4=-\frac{2}{4}$, ..., ezért a Fourier-sor

$$2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{2}{4}\sin 4x+-\ldots$$

Fourier-sor meghatározása linearizálással:

1.) $f(x)=3+2\cos x+5\sin 7x$ Fourier-sora $3+2\cos x+5\sin 7x$,
tehát $a_0=3$, $a_1=2$, $b_7=5$, a többi együttható $=0$

2.) $f(x)=\cos^2 4x$, $\cos^2 4x=\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 8x$,
tehát $a_0=\frac{1}{2}$, $a_8=\frac{1}{2}$, a többi együttható $=0$

3.) $f(x)=\cos x\cdot\sin^2 3x$,

$$\cos x\sin^2 3x=\cos x\cdot\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos\overset{\beta}{x}\cdot\cos\overset{\alpha}{6x}$$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos(6x+x) + \cos(6x-x)\right) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 7x + \frac{1}{4}\cos 5x,$

tehát $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{4}$, $a_7 = \frac{1}{4}$, a többi együttható 0

b.) $f(x) = \sin x \cdot \sin \overset{\beta}{2x} \cdot \sin \overset{\alpha}{3x} = \sin x \cdot \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x) =$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

$\frac{1}{2}\sin \overset{\alpha}{x} \cos \overset{\beta}{x} - \frac{1}{2}\sin \overset{\alpha}{x}\cos \overset{\beta}{5x} =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 2x + \underbrace{\sin 0}_{0}) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 6x + \underbrace{\sin(-4x)}_{-\sin 4x}) =$

$\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x,$

tehát $b_2 = \frac{1}{4}$, $b_4 = \frac{1}{4}$, $b_6 = -\frac{1}{4}$, a többi együttható $= 0$.

T-szerint periodikus fv Fourier-sora:

Tegyük fel, hogy $f(x)$ egy T szerint periodikus fv.

Ekkor az ő Fourier-sora az

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2k\pi}{T}x + b_k \sin\frac{2k\pi}{T}x\right),$$

ahol $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$, $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2k\pi}{T}x\,dx$,

$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2k\pi}{T}x\,dx$

Fourier-sorok pontonkénti konvergenciája

Tétel Legyen $f(x)$ egy olyan 2π-szerint periodikus fv, amelyre

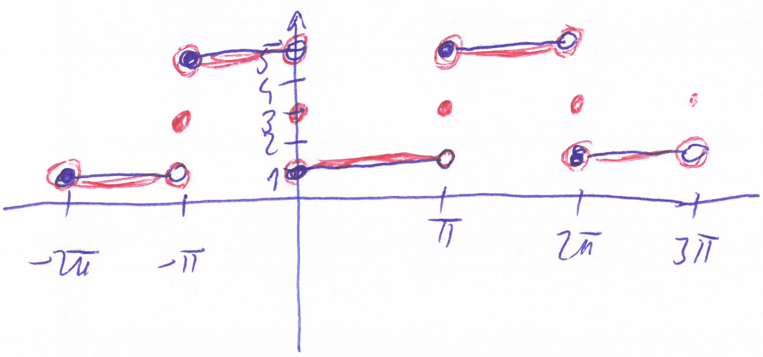
1, a $[0,2\pi]$ intervallum felbontható véges sok részintervallumra, amelyek belsejében $f(x)$ monoton és folytonos

2, a szakadási helyek van bal- és jobboldali határértéke.

Ekkor a Fourier-sor értéke egyenlő az $f(x)$ fv értékével, ahol $f(x)$ folytonos ahol $f(x)$-nek szakadása van, ott a Fourier-sor a bal- és jobboldali határértékek átlagát veszi fel.

Pl. 1. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha } 0\le x<\pi \\ 5, & \text{ha } \pi\le x<2\pi \end{cases}$

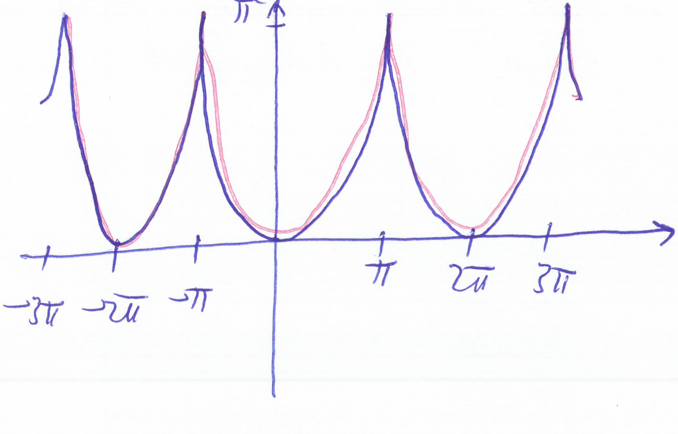
Fourier-sor: $3-\frac{8}{\pi}\sin x-\frac{8}{3\pi}\sin 3x-\frac{8}{5\pi}\sin 5x-\dots$



2. $f(x)=x^2,\quad -\pi\le x<\pi$

Fourier-sor:

$\frac{\pi^2}{3}-4\cos x+\cos 2x-\frac{4}{9}\cos 3x+\frac{4}{16}\cos 4x-+\dots$



Ha $x=\pi$:

$$f(\pi)=\pi^2=\frac{\pi^2}{3}-4\underbrace{\cos\pi}_{-1}+\underbrace{\cos 2\pi}_{1}-\frac{4}{9}\underbrace{\cos 3\pi}_{-1}+\frac{4}{16}\underbrace{\cos 4\pi}_{1}-+\dots=$$

$$\frac{\pi^2}{3}+\frac{4}{1}+\frac{4}{4}+\frac{4}{9}+\frac{4}{16}+\dots$$

$$\frac{2\pi^2}{3}=\frac{4}{1}+\frac{4}{4}+\frac{4}{9}+\frac{4}{16}+\dots \qquad /:4$$

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Parseval-formula: Ha $f^2(x)$-nek létezik a határozott integrálja $[0,2\pi]$-ben, akkor

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx=2\pi a_0^2+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Pl. Ha $f(x)=x$, ha $-\pi<x<\pi$, akkor a Fourier-sor:

$$2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{2}{4}\sin 4x+-\dots, \quad \text{azaz}$$

$$a_0=0,\quad a_k=0,\quad b_k=\frac{2(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}-\frac{(-\pi)^3}{3}=\frac{2\pi^3}{3}$$

2π-szerint per

Parseval

$$\Rightarrow\quad \frac{2\pi^3}{3}=2\pi\cdot 0^2+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(0^2+\left(\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\right)^2\right)=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} \qquad /:\pi$$

$$\frac{2\pi^2}{3}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} \qquad /:4$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$