Függvénysorok

Legyen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ közös $D \subset \mathbb{R}$ értelmezési tartománnyal rendelkező fvek. A belőlük formált függvénysor az

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

végtelen összeg. Egy $x_0 \in D$ valós számot behelyettesítve az

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

végtelen sort kapjuk, ami vagy konvergens vagy divergens. Azon x_0-k összessége, amire a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ végtelen sor konvergens, alkotják a fsor konvergenciatartományát (röviden: KT), tehát

$$KT = \{ x_0 : x_0 \in D, \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \text{ konv} \}.$$

Pl. 1. $e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$,

azaz $f_n(x) = e^{nx}$, $D = \mathbb{R}$. Ha $x_0 \in \mathbb{R}$

$$e^{x_0} + e^{2x_0} + e^{3x_0} + \ldots + e^{nx_0} + \ldots = e^{x_0}\left(1 + e^{x_0} + (e^{x_0})^2 + \ldots + (e^{x_0})^{n-1} + \ldots\right),$$

ahol a zárójelben egy végtelen mértani sor van, $q = e^{x_0}$. Ez akkor konv., ha $e^{x_0} < 1$, azaz $x_0 < 0$. Tehát a KT a negatív valós számok halmaza.

2. $$\sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + \ldots + \frac{\sin^n x}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n}.$$

Ismét $D = \mathbb{R}$. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$. Konvergens-e a

$$\sin x_0 + \frac{\sin^2 x_0}{2} + \frac{\sin^3 x_0}{3} + \ldots + \frac{\sin^n x_0}{n} + \ldots$$

végtelen sor?

Gyökkritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\sin^n x_0}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin x_0|}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = |\sin x_0| .$$

Ez konvergens, ha $|\sin x_0| < 1$, azaz $\sin x_0 \neq \pm 1$.

$\sin x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x_0 = -1 \Rightarrow x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$

Ha $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x_0}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ami divergens

a p-szabály miatt $(p=1)$

Ha $x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x_0}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, ami egy alternáló

sor, $a_n = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, monoton csökkenve tart a

0-hoz $\xRightarrow{\text{Leibniz}}$ konvergens

Tehát $KT = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Hatványsorok

A hatványsor egy speciális fvsor, melynek általános alakja:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n ,$$

ahol „a" a hatványsor középpontja és az együtthatók:

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}.$

Pl. $\frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{2\cdot 4}(x-3)^2 + \frac{1}{3\cdot 8}(x-3)^3 + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^n}(x-3)^n + \ldots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}(x-3)^n$$

Most $a=3$, $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$. Mi a KT?

Az általános gyökkritérium alapján, ha

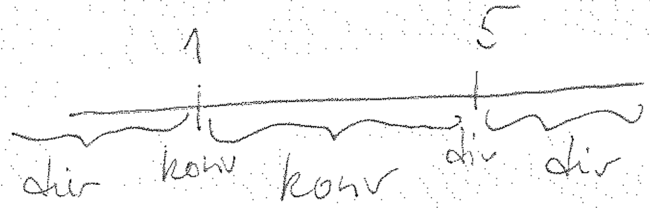
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-3)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\cdot 2}|x-3|=\frac{1}{2}|x-3|<1,$$

azaz $|x-3|<2$, tehát $-2<x-3<2$, $1<x<5$, akkor a hatványsor konvergens.

ha $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-3)^n\right|}=\frac{1}{2}|x-3|>1$, azaz $|x-3|>2$,

tehát $x-3>2$ vagy $x-3<-2$, azaz $x>5$ vagy $x<1$,

akkor divergens. Így



$KT=[1,5[$

balról zárt, jobbról nyitott intervallum

Még meg kell vizsgálni a $x=1$ és $x=5$ értékeket.

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}(1-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, ami egy alternáló sor. $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}\searrow 0 \overset{\text{Leibniz-kritérium}}{\Rightarrow}$ konvergens

$x=5$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}(5-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, ami a p-szabály szerint ($p=1$) divergens.

Általában, a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-a)^n$ hatványsor KT-ának meghatározásához először a konvergenciasugarat számoljuk ki:

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{vagy} \quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Ezt úgy értjük, hogy $\frac{1}{+\infty}=0$ és $\frac{1}{0}=+\infty$.

Ha $R=0$, akkor $KT=\{a\}$.

Ha $R=+\infty$, akkor $KT=\mathbb{R}$.

Ha $R>0$ valós szám, akkor

$$\underbrace{\quad}_{\text{div}}\ \overset{a-R}{|}\ {?}\ \underbrace{\qquad \overset{a}{|} \qquad}_{\text{konv}}\ {?}\ \overset{a+R}{|}\ \underbrace{\quad}_{\text{div}}$$

(az $x=a-R$ és $a+R$ értékeket külön kell vizsgálni)

Pl. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2x+3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2(x+1{,}5))^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x-(-1{,}5))^n$,

ezért $a=-1{,}5$, $a_n=\frac{2^n}{n^2}$.

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{\to 1}}}=\frac{1}{2}$$

$$\overset{-2}{|}\quad \overset{-1{,}5}{|}\quad \overset{-1}{|}$$

$x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(2\cdot(-2)+3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, ami egy

alternáló sor, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}\searrow 0 \overset{\text{Leibniz-}}{\underset{\text{kritérium}}{\Longrightarrow}}$ konvergens

$x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(2(-1)+3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot 1^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, ami

a p-szabály ($p=2$) szerint konvergens.

Tehát $KT=[-2,-1]$ zárt intervallum.

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-0)^n$, $a=0$, $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$$

$\Rightarrow KT=\mathbb{R}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x-2)^n$, $a=2$, $a_n=n^n$; $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow KT=\{2\}$.

Taylor-sorok

5.

Ha $-1<q<1$, akkor $1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+\dots=\frac{1}{1-q}$,

tehát $-1<x<1$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+\dots,$$

azaz az $f(x)$-et fel tudjuk írni $a=0$ körüli hatványsorként.

Feladat: Legyen $f(x)$ értelmezési tartománya D_f, $a\in D_f$.

Határozzuk meg azon $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$ számokat, amire

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+a_4(x-a)^4+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n.$$

Tegyük fel, hogy $f(x)$ ∞ sokszor deriválható a-ban. Akkor

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+4a_4(x-a)^3+\dots$$

$$f''(x)=2a_2+2\cdot3a_3(x-a)+4\cdot3a_4(x-a)^2+\dots$$

$$f'''(x)=2\cdot3a_3+2\cdot3\cdot4a_4(x-a)+\dots$$

$\vdots$

Ha az eredeti fvbe és deriváltjaiba $x=a$-t helyettesítünk:

$$f(a)=a_0+a_1(a-a)+a_2(a-a)^2+a_3(a-a)^3+\dots=a_0\Rightarrow a_0=f(a)$$

$$f'(a)=a_1+2a_2(a-a)+3a_3(a-a)^2+4a_4(a-a)^3+\dots=a_1\Rightarrow a_1=f'(a)$$

$$f''(a)=2a_2+2\cdot3a_3(a-a)+4\cdot3a_4(a-a)^2+\dots=2a_2\Rightarrow a_2=\frac{f''(a)}{2!}$$

$$f'''(a)=2\cdot3a_3+2\cdot3\cdot4(a-a)+\dots=3!\,a_3\Rightarrow a_3=\frac{f'''(a)}{3!}$$

$\vdots$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$\vdots$

Def Tegyük fel, hogy az $f(x)$ olyan fv, ami a-ban ∞ sokszor deriválható. Ekkor $f(x)$ a-ban vett Taylor-sora:

$$T_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Pl. 1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$

$$f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f'''(x) = -6x^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$$
$$\ldots \Rightarrow f^{(n)}(x) = n!\,x^{-(n+1)}$$

$$f(2) = \frac{1}{2},\ f'(2) = -1\cdot 2^{-2} = -\frac{1}{4},\ f''(2) = 2\cdot 2^{-3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\ f'''(2) = -6\cdot 2^{-4} = -\frac{6}{16},$$
$$f^{(4)}(2) = 24\cdot 2^{-5} = \frac{24}{32}, \ldots, f^{(n)}(2) = n!\,2^{-(n+1)} = \frac{n!}{2^{n+1}}, \ldots$$

$$T_{f,2} = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4$$
$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1/4}{2!}(x-2)^2 + \frac{-\frac{6}{16}}{3!}(x-2)^3 + \frac{\frac{24}{32}}{4!}(x-2)^4$$
$$+ \ldots + \frac{\frac{n!}{2^{n+1}}}{n!}(x-2)^n + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 - + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x-2}{2} + \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^3 + \left(\frac{x-2}{2}\right)^4 - + \ldots\right) = \frac{1}{1-\left(-\frac{x-2}{2}\right)} = \frac{2}{x}$$

$q = -\frac{x-2}{2}$ mértanisor

A mértani sor összegképletét akkor használhatjuk, ha

$\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1$, azaz $\frac{|x-2|}{2} < 1$, tehát $|x-2| < 2$, $-2 < x-2 < 2$,

$0 < x < 4$.

2. $f(x)=e^x$, $a=0$

$f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $f'''(x)=e^x,\dots \Rightarrow f(0)=e^0=1$, $f'(0)=e^0=1$,

$f''(0)=e^0=1$, $f'''(0)=e^0=1,\dots$

$$T_{f,0}(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4+\dots$$

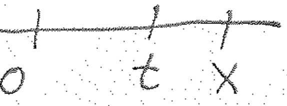
$$=1+1(x-0)+\frac{1}{2!}(x-0)^2+\frac{1}{3!}(x-0)^3+\frac{1}{4!}(x-0)^4+\dots=$$

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

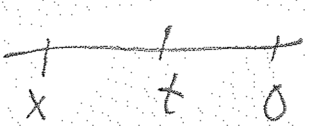
Milyen feltételek esetén igaz, hogy $f(x)=T_{f,a}(x)$ valamely $x\in\mathbb{R}$ esetén.

Tétel Ha létezik $M\in\mathbb{R}$, hogy minden a és x közti t esetén $|f^{(n+1)}(t)|\le M$ minden n esetén, akkor $f(x)=T_{f,a}(x)$.

Pl. $f(x)=e^x$, $a=0 \Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x$

Ha $x>0$: , $0\le t\le x$,

$$|f^{(n+1)}(t)|=e^t\le e^x=M$$

Ha $x<0$ , $x\le t\le 0$

$$|f^{(n+1)}(t)|=e^t\le e^0=1=M$$

$$\Rightarrow T_{f,0}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

Pl. $x=1$: $e=e^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots$

Nevezetes Taylor-sorok, $a=0$ (ezt Maclaurin-sornak is hívják)

$f(x)$	Taylor-sor	Hol egyenlő $f(x)$ a Taylor-sorral
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$	$]-1,1]$

Ebből további Taylor-sorok is meghatározhatók: $a=0$

Pl. 1. $f(x)=e^{4x}=1+4x+\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^3}{3!}+\dots=1+4x+\frac{16}{2}x^2+\frac{64}{3!}x^3+\dots$

2. $\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x=$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(6x)^2}{2!}+\frac{(6x)^4}{4!}-\frac{(6x)^6}{6!}+-\dots\right)=9x^2-\frac{6^4}{48}x^4+\frac{6^6}{2\cdot 6!}x^6-+\dots$$

Alkalmazások:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots\right)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{3!}+\underbrace{\frac{x^2}{5!}-\frac{x^4}{7!}+-\dots}_{\to 0}=-\frac{1}{6}$$

2. Határozzuk meg 10^{-3} hibával a $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ határozott integrált!

$$e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\frac{(-x^2)^4}{4!}+\frac{(-x^2)^5}{5!}+\dots=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}\dots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1 1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+-\dots dx=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{216}-\frac{x^{11}}{1320}+-\dots\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\underbrace{\frac{1}{1320}}+-\dots\Rightarrow\left|\int_0^1 e^{-x^2}dx-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}\right)\right|<10^{-3}.$$