Végtelen sorok

Bevezetés

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots$$

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok. Az

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

végtelen összeget végtelen sornak mondjuk. Rövid jelölés: $\sum a_n$.

A $\sum a_n$ n-edik részletösszege: $s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Def A $\sum a_n$ konvergens és értéke a A valós szám, ha $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nem létezik vagy nem valós szám, akkor $\sum a_n$ divergens.

Pl. 1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Legyen $q\in\mathbb{R}$: $s_n = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-2}+q^{n-1} \quad /\cdot q$

$$-\quad q s_n = q+q^2+q^3+\ldots\ldots+q^{n-1}+q^n$$

$$s_n - s_n q = 1-q^n$$

$$(1-q)s_n = 1-q^n \Rightarrow s_n = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{ha } q\neq 1.$$

Általában: milyen $q\in\mathbb{R}$ esetén lesz konvergens az

$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+\ldots$? Ezt mértani sornak hívjuk.

$$s_n = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & \text{ha } q=1 \\ n & \text{ha } q=1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, tehát $q=1$ esetén divergens

$q \neq 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ ha $|q|<1$, azaz $-1<q<1$

Ha $q \geq 1$ vagy $q \leq -1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nem létezik vagy nem valós szám. Tehát a mértani sor $-1<q<1$ esetén konvergens és ekkor

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots = \frac{1}{1-q}, \text{ azaz } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Pl. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1/2} = 2$

2. $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3, \ldots, a_n=n, \ldots$ esetén

$\sum a_n = 1+2+3+4+\ldots+n+\ldots$

$s_1 = 1$,

$s_2 = 1+2 = 3$

$s_3 = 1+2+3 = 6$

$s_4 = 1+2+3+4 = 10$

$\vdots$

$s_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$, ezért $\sum a_n$ divergens.

3. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$s_1 = \frac{1}{2}$

$s_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$s_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{2}{3}+\frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$s_4 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20} = \frac{3}{4}+\frac{1}{20} = \frac{4}{5}$

$s_5 = \frac{4}{5}+\frac{1}{30} = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

$\vdots$

$s_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Így $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens

és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Fő kérdések végtelen sorokkal kapcsolatban:

1. A $\sum a_n$ konvergens vagy divergens;
2. Ha a $\sum a_n$ konvergens, akkor mivel egyenlő?

Az 1. kérdésre a konvergenciakritériumok adnak választ.

<u>Műveletek végtelen sorokkal</u>

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorok és $c_n = a_n + b_n$, akkor $\sum c_n$ is végtelen sor és ezt $\sum a_n$ és $\sum b_n$ összegének hívjuk:

$$\sum c_n = \sum (a_n + b_n)$$

<u>Tétel</u> Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok, akkor $c_n = a_n + b_n$ esetén $\sum c_n$ is konvergens és $\sum c_n = \sum a_n + \sum b_n$.

<u>Biz</u> Tudjuk, hogy $\sum a_n = A \in \mathbb{R}$, $\sum b_n = B \in \mathbb{R}$.

Legyen $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \approx A$ ha n elég nagy

$s_n' = b_1 + b_2 + \dots + b_n \approx B$ ha n elég nagy

$$s_n'' = c_1 + c_2 + \dots + c_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$= \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}_{\approx A} + \underbrace{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}_{\approx B} \approx A + B = \sum a_n + \sum b_n,$$

ezért létezik a $\lim_{n\to\infty} s_n''$ és $\lim_{n\to\infty} s_n'' = A + B = \sum a_n + \sum b_n$.

Hasonlóan: Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorok, akkor $d_n = a_n - b_n$ esetén $\sum d_n$ is végtelen sor és ezt $\sum a_n$ és $\sum b_n$ különbségének nevezzük: $\sum d_n = \sum (a_n - b_n)$.

Tétel Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok, akkor $d_n = a_n - b_n$ esetén $\sum d_n$ is konvergens sor és $\sum d_n = \sum a_n - \sum b_n$.

Ha $\sum a_n$ végtelen sor, $c \in \mathbb{R}$, akkor $e_n = c \cdot a_n$ esetén $\sum e_n$ is végtelen sor: $\sum e_n = \sum c a_n$.

Tétel Ha $\sum a_n$ konvergens, $c \in \mathbb{R}$, $e_n = c a_n$, akkor $\sum e_n = \sum c a_n$ is konvergens végtelen sor és $\sum c a_n = c \sum a_n$.

Pl. 1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{8^n} + \frac{5^n}{8^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{8}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n =$$

$$\frac{1}{1-\frac{2}{8}} + \frac{1}{1-\frac{5}{8}}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{n+1}}{3^{2n+2}} = \frac{5 \cdot 4^{1+1}}{3^{2\cdot 1+2}} + \frac{5 \cdot 4^{2+1}}{3^{2\cdot 2+2}} + \frac{5 \cdot 4^{3+1}}{3^{2\cdot 3+2}} + \frac{5 \cdot 4^{4+1}}{3^{2\cdot 4+2}} + \ldots =$$

$$\frac{80}{81} + \frac{320}{729} + \frac{1280}{6561} + \frac{5120}{59049} + \ldots =$$

$$\frac{80}{81}\left(1 + \frac{4}{9} + \frac{16}{81} + \frac{64}{729} + \frac{256}{6561} + \ldots\right) =$$

$$\frac{80}{81}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots\right) = \frac{80}{81} \cdot \frac{1}{1 - 4/9}.$$

Konvergenciakritériumok

Tétel Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Biz Ha $\sum a_n$, konv, akkor $\sum a_n = A$, ezért ha n nagy, akkor

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \approx A$

$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \approx A$

$$\left.\begin{array}{l} s_n - s_{n-1} = (a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n) - (a_1+a_2+\dots+a_{n-1}) = a_n \\ s_n - s_{n-1} \approx A - A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \approx 0.$$

Köv Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nem létezik, akkor $\sum a_n$ divergens.

Pl. 1. $1-1+1-1+1-1+-\dots$ divergens, mert $a_n = (-1)^{n-1}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nem létezik

2. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \frac{6}{11} + \frac{7}{13} + \dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$

divergens, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Megj Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor lehet, hogy $\sum a_n$ konv, de az is lehet, hogy divergens, tehát ekkor semmit se tudunk.

A továbbiakban először olyan végtelen sorokkal foglalkozunk, ahol $a_n > 0$. Ekkor

$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

monoton növő sorozat.

Tétel Ha $a_n > 0$, akkor $\sum a_n$ pontosan akkor konvergens, ha $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ sorozat felülről korlátos. (6)

Tétel (Gyökkritérium): Tegyük fel, hogy $a_n > 0$.

1. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konv.

2. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ div.

Megj: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, akkor lehet, hogy $\sum a_n$ konv, de lehet, hogy div.

Biz. 1. Azt kell megmutatnunk, hogy $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ felülről korlátos. Legyen $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < q < 1$. Akkor létezik N_0, hogy $n \geq N_0$ esetén $\sqrt[n]{a_n} < q$.

$n = N_0$: $\sqrt[N_0]{a_{N_0}} < q \Rightarrow a_{N_0} < q^{N_0}$

$n = N_0 + 1$: $\sqrt[N_0+1]{a_{N_0+1}} < q \Rightarrow a_{N_0+1} < q^{N_0+1}$

$n = N_0 + 2$: $\sqrt[N_0+2]{a_{N_0+2}} < q \Rightarrow a_{N_0+2} < q^{N_0+2}$

$\vdots$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_0-1} + a_{N_0} + a_{N_0+1} + a_{N_0+2} + \ldots + a_n <$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_0-1} + \underbrace{q^{N_0} + q^{N_0+1} + q^{N_0+2} + \ldots}_{q^{N_0}(1+q+q^2+\ldots) = q^{N_0} \cdot \frac{1}{1-q}} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_0-1} + \frac{q^{N_0}}{1-q},$$

ami egy n-től nem függő felső korlát.

2. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor létezik N_0, hogy $n \geq N_0$ esetén $\sqrt[n]{a_n} > 1$, azaz $a_n \geq 1$. Így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nem teljesül, ezért $\sum a_n$ divergens.

Pl. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{5^{n+2}}$:

$a_n = \frac{n3^n}{5^{n+2}}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n\cdot 3^n}{\underbrace{5^{n+2}}_{5^2\cdot 5^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\to 1}\cdot 3}{\underbrace{\sqrt[n]{25}}_{\to 1}\cdot 5} = \frac{3}{5} < 1$ konv

Tudjuk: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$, ha $c>0$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+7^n}{6^{n+3}}$

$a_n = \frac{2^n+7^n}{6^{n+3}}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+7^n}{6^{n+3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{7^n(1+\frac{2^n}{7^n})}}{\sqrt[n]{6^n\cdot 6^3}} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot \overbrace{\sqrt[n]{1+(\frac{2}{7})^n}}^{\to 1}}{6\underbrace{\sqrt[n]{216}}_{\to 1}} = \frac{7}{6} > 1$ div

Tétel (Hányadoskritérium) Tegyük fel, hogy $a_n > 0$.

1. Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konv.
2. Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ div.

Megj: Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor lehet, hogy $\sum a_n$ konv, de lehet, hogy div.

Pl. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot 5^n}{4^{n+1}}$

$a_n = \frac{n^2\cdot 5^n}{4^{n+1}}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2\cdot 5^{n+1}}{4^{(n+1)+1}} = \frac{(n^2+2n+1)5^{n+1}}{4^{n+2}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n^2+2n+1)5^{n+1}}{4^{n+2}}}{\frac{n^2 5^n}{4^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}(n^2+2n+1)5^{n+1}}{4^{n+2}n^2\cdot 5^n} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+1)5}{4\cdot n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+10n+5}{4n^2} = \frac{5}{4} > 1 \quad \text{div.}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ $\qquad 0!=1$

$$a_n = \frac{10^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{n!}^{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot 10^{n+1}}{\underbrace{(n+1)!}_{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}\cdot 10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 \quad \text{konv}$$

<u>Tétel</u> (Integrálkritérium). Legyen $\sum a_n$ olyan, hogy $n \geq N_0$ esetén $a_n > 0$ és monoton csökkenő. Legyen $f(x)$ olyan fv, amely monoton csökken ha $x \geq N_0$ és $f(n) = a_n$ ha $n \geq N_0$.

1. Ha $\int_{N_0}^{\infty} f(x)dx$ konv $\Rightarrow \sum a_n$ konv.
2. Ha $\int_{N_0}^{\infty} f(x)dx$ div $\Rightarrow \sum a_n$ div.

Pl. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

$a_n = \frac{1}{n^2+1}$ monoton csökken ha $n \geq 1$. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$f(n) = \frac{1}{n^2+1} = a_n$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{B\to\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_1^B = \lim_{B\to\infty} (\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} 1) =$$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ konv $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ is konv.

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

$\frac{1}{n \ln n}$ monoton csökken ha $n \geq 2$ (mert $n \cdot \ln n$ monoton nő)

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ monoton csökken ha $x \geq 2$ (mert $x \ln x$ mon. nő)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{B \to \infty} \int_2^B \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{B \to \infty} \int_2^B \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx =$$

$$\lim_{B \to \infty} \left[\ln |\ln x| \right]_2^B = \lim_{B \to \infty} \ln|\ln B| - \ln|\ln 2| = +\infty \text{ div}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ is div}$$

3. A1-ből volt az improprius integrálokra vonatkozó

p-szabály: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{konv}, & \text{ha } p > 1 \\ \text{div}, & \text{ha } p \leq 1 \end{cases}$

A végtelen sorokra vonatkozó p-szabály:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konv} & \text{ha } p > 1 \\ \text{div} & \text{ha } p \leq 1. \end{cases}$$

Pl $p = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ konv

$p = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ div

$p = 1/2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ div

Tétel (Limesz összehasonlító kritérium) Legyen $a_n > 0$, $b_n > 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ valós szám.

Ha $\sum b_n$ konv $\Rightarrow \sum a_n$ konv

Ha $\sum b_n$ div $\Rightarrow \sum a_n$ div

Pl. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$

$a_n = \frac{1}{2n+5}$, $b_n = \frac{1}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+5}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div } (p\text{-szabály}: p=1\leq 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5} \text{ is div}$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2-1}$

$a_n = \frac{1}{n^3+3n^2-1}$, $b_n = \frac{1}{n^3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3+3n^2-1}}{\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+3n^2-1} = 1 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ konv } (p\text{-szabály}: p=3) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2-1} \text{ is konv}$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10}{2^n+n}$

$a_n = \frac{10}{2^n+n}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{10}{2^n+n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10\cdot 2^n}{2^n+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10}{1+\underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\to 0}} = 10 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ mértani sor}, 0 < q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{konv} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n} \text{ is konv.}$$

Legyen $a_n > 0$. Ekkor az $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots$ és $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - + \ldots$ alakú végtelen sorokat alternáló soroknak mondjuk.

Pl. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \ldots$, $a_n = \frac{1}{n}$

Tétel (Leibniz-kritérium) Ha $a_n \geq 0$ monoton csökkenve tart a 0-hoz, akkor az $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots$ alternáló sor konvergens.

Biz. $s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}$

$$s_{2n+2} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots + a_{2n-2} - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} =$$

$$s_{2n} + (\underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0,\ \text{mivel } a_n \text{ monoton csökken}}) \Rightarrow s_{2n+2} \geq s_{2n}.$$

Tehát $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n+2} \leq \ldots$

Megmutatjuk, hogy s_{2n} felülről korlátos:

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \leq a_1$$

s_{2n} monoton nő és felülről korlátos, ezért konvergens.

Tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = A$ határérték.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ezért $s_{2n+1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1}$

$= s_{2n} + a_{2n+1} \approx s_{2n} \approx A$ ha n nagy, így

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = A \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = A.$$

Pl. 1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\dots$ konv, mert $a_n \searrow 0$ (monoton csökkenve tart a 0-hoz).

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$$

ez alternáló sor: $a_n = \left|\frac{(-1)^n n}{2^n}\right| = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$

monoton csökkenés: $a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1}$

$$\frac{n}{2^n} \overset{?}{\geq} \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$2^{n+1} \cdot n \overset{?}{\geq} (n+1)2^n$$

$$2n \overset{?}{\geq} n+1$$

$$n \overset{?}{\geq} 1 \quad \checkmark$$

<u>Def</u> Ha a $\sum a_n$ olyan, hogy $\sum |a_n|$ konvergens, akkor $\sum a_n$-et abszolút konvergensnek mondjuk.

<u>Tétel</u> Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

<u>Tétel</u> (Általánosított gyökkritérium)

1. Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv
2. Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ div