Vektorterek

Az
$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n&=b_m
\end{aligned}$$
lineáris egyenletrendszernél az alábbi m-dimenziós vektorokat bevezetve

$$\underline{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad \underline{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\dots,\quad \underline{a}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},\quad \underline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$\underline{a}_1x_1+\underline{a}_2x_2+\dots+\underline{a}_m x_n = x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\dots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}x_1\\a_{21}x_1\\\vdots\\a_{m1}x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{12}x_2\\a_{22}x_2\\\vdots\\a_{m2}x_2\end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix}a_{1n}x_n\\a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

Két vektor (vagy mátrix) akkor egyenlő, ha koordinátáik egyenlők, mint a fenti lineáris egyenletrendszer így is írható:

$$\underline{a}_1+x_2\underline{a}_2+\dots+x_n\underline{a}_n=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}=\underline{b}$$

Tehát természetes dolog m-dimenziós vektorokkal dolgozni, ahol a koordináták valós számok. Az ilyen vektorok összességét $\mathbb{R}^m$-mel jelöljük.

Ennek általánosítása a vektortér fogalma.

Def Legyen V egy nemüres halmaz, amelyen két műveletet értelmezünk:

1. összeadás: minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$-hez hozzárendelünk egy $\underline{u}+\underline{v}$-vel jelölt V-beli elemet
2. skalárral való szorzás: minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u} \in V$-hez hozzárendeli egy $\alpha\underline{u}$-val jelölt V-beli elemet

Ha ezek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal, akkor V-t valós vektortérnek hívjuk:

1, minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\underline{u}+\underline{v} \in V$

2, minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u}$

3, minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ esetén $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$

4, létezik nullelem: $\underline{0} \in V$, amire $\underline{v}+\underline{0}=\underline{v}$ minden $\underline{v} \in V$ esetén

5, létezik inverz: minden $\underline{v} \in V$ esetén létezik $-\underline{v} \in V$, amire

$$\underline{v}+(-\underline{v}) = \underline{0}$$

6, minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u} \in V$ esetén $\alpha\underline{u} \in V$

7, minden $\underline{v} \in V$ esetén $1\underline{v} = \underline{v}$

8, minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in V$ esetén $(\alpha\beta)\underline{v} = \alpha(\beta\underline{v})$

9, minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in V$ esetén $(\alpha+\beta)\underline{v} = \alpha\underline{v}+\beta\underline{v}$

10, minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\alpha(\underline{u}+\underline{v}) = \alpha\underline{u}+\alpha\underline{v}$

Példák vektorterekre:

1, $\mathbb{R}^m = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$ a szokásos (komponensenként történő) összeadással, skalárral való szorzással

3.

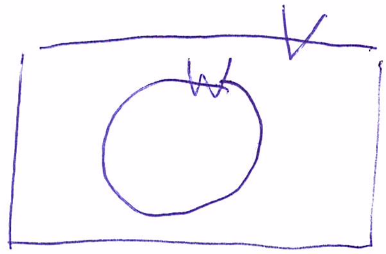
2, $\mathbb{R}^{m\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

a szokásos összeadással, számmal szorzással

3, $V = \{ f(x) : f(x) \text{ valós fv} \}$ (tehát az értelmezési tartomány $= \mathbb{R}$, az értékkészlet a valós számok részhalmaza),

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = c \cdot f(x)$

1, $\{ \sum a_n$ végtelen sorok; $\sum a_n$ konvergens$\}$



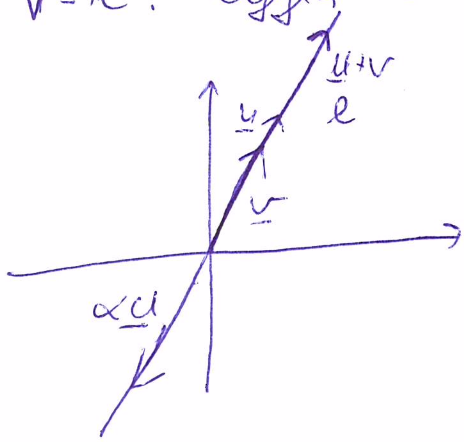
A V vektortér W részhalmaza a V altere, ha maga is vektortér a V-beli műveletekkel.

Tétel Legyen $W \subseteq V$ (W részhalmaza V-nek). Ekkor a W ~~altér~~ pontosan akkor altere V-nek, ha

1, minden $\underline{u}, \underline{v} \in W$ esetén $\underline{u}+\underline{v} \in W$

2, minden $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in V$ esetén $\alpha \underline{v} \in W$.

Pl. 1. $V = \mathbb{R}^2$. Legyen e egy 0-n átmenő egyenes.



Legyen $W = \{ \underline{v} : \underline{v}$ végpontja e-n van$\}$

Ez altér, mert

$\underline{u}, \underline{v} \in W$ esetén $\underline{u}+\underline{v} \in W$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in W$ esetén $\alpha \underline{v} \in W$.

2, $V = \mathbb{R}^3$:

a, Legyen S egy 0-n átmenő sík

$W = \{ \underline{v} : \underline{v}$ végpontja S-ben van $\}$

b, Legyen e egy 0-n átmenő egyenes

$W = \{ \underline{v} : \underline{v}$ végpontja S-ben van $\}$

3, $V = \{ f(x) : f(x)$ valós fv $\}$

a, $W = \{ f(x) : f(x)$ folytonos $\}$

b, $W = \{ f(x) : f(x)$ mindenhol deriválható $\}$

4, Legyen V egy vektortér, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in V$. Ekkor

$$\{ \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k : \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

halmaz altér V-ben. A $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k$ összeget lineáris kombinációnak mondjuk. Ezt a vektorteret a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérnek mondjuk. Jelölés: $\text{lin}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$

Pl. $V = \mathbb{R}^3$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{lin}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

ami az xy sík

<u>Def</u> A V vektortérben a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n \in V$ vektorok bázist alkotnak, ha minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen írható

$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots + \lambda_n \underline{b}_n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ alakba.

Pl. 1. $\mathbb{R}^2$ a, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázis, mert $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= v_1 \underline{b}_1 + v_2 \underline{b}_2$ az egyetlen felírása $\underline{v}$-nek a

$\underline{b}_1, \underline{b}_2$ lineáris kombinációjaként b, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ is bázis, mert $\underline{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ esetén

$\underline{v} = (v_1 - v_2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ az egyetlen felírás

c, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ nem bázis, mert $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 2\underline{b}_1 + 0\underline{b}_2 =$

$= 0\underline{b}_1 + 1\cdot\underline{b}_2$, nem egyértelmű a felírás

d, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ sem bázis, mert

$\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} = 0\underline{b}_1 + 0\underline{b}_2 + 1\cdot\underline{b}_3 = -1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} = -1\cdot\underline{b}_1 + 4\underline{b}_2 + 0\underline{b}_3$

nem egyértelmű a felírás

2. $\mathbb{R}^3$: a, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ bázis, mert

$\underline{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = v_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + v_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = v_1\underline{b}_1 + v_2\underline{b}_2 + v_3\underline{b}_3$

az egyetlen felírás

b, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ is bázis, mert

$\underline{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \frac{v_1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{v_2}{3}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{v_3}{4}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \frac{v_1}{2}\underline{b}_1 + \frac{v_2}{3}\underline{b}_2 + \frac{v_3}{3}\underline{b}_3$

az egyetlen felírás

c, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ is bázis, mert

$\underline{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = (v_1 - v_2 - v_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (v_2 - v_3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + v_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} =$

$(v_1 - v_2 - v_3)\underline{b}_1 + (v_2 - v_3)b_2 + v_3\underline{b}_3$ az egyetlen felírás

3\. $\mathbb{R}^{2\times 2}$: $\underline{b}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\underline{b}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

bázis, mert

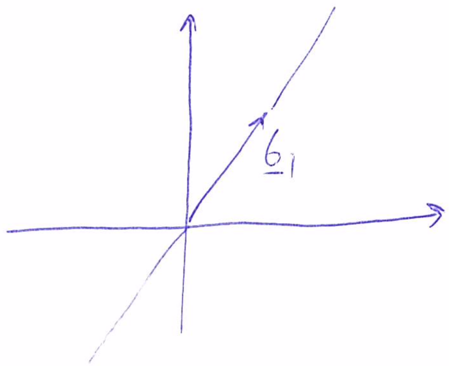
$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$=a_{11}\underline{b}_1+a_{12}\underline{b}_2+a_{21}\underline{b}_3+a_{22}\underline{b}_4$ az egyedüli felírás

$\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3,\underline{b}_4$ lineáris kombinációjaként.

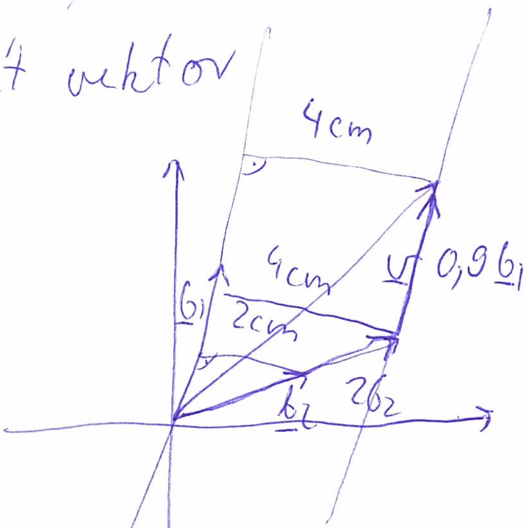
Hogyan lehet $\mathbb{R}^2$-ben eldönteni néhány vektorról, hogy bázist alkot-e?

Egy vektor nem alkothat bázist:



Az $\alpha_1\underline{b}_1$ vektorok a $\underline{b}_1$ egyenesén vannak, más vektorok nem írhatók fel $\alpha_1\underline{b}_1$ alakba.

Két vektor



Ha $\underline{v}=\alpha_1\underline{b}_1+\alpha_2\underline{b}_2$, akkor

$\alpha_2=2$

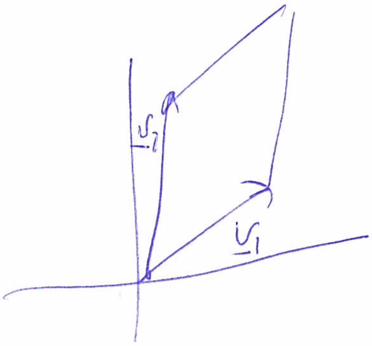
$\underline{v}=0,9\,\underline{b}_1+2\underline{b}_2$

Így minden vektort fel lehet írni $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2$ alakba.

$\mathbb{R}^2$-ben a $\underline{v}_1,\underline{v}_2$ vektorok akkor alkotnak bázist, ha nem párhuzamosak, azaz az általuk meghatározott paralelogramma területe $\neq 0$. Ha $\underline{v}_1=\begin{pmatrix}v_{11}\\v_{21}\end{pmatrix}$

$v_2=\begin{pmatrix}v_{12}\\v_{22}\end{pmatrix}$

Akkor a v_1, v_2 által meghatározott paralelogramma területe:



$$ter = \left| \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} \right| \neq 0$$

Tehát a $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ koordinátájú vektorok csak akkor alkotnak bázist, ha $\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

$\mathbb{R}^2$-ben csak két vektor alkothat bázist.

Pl. $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bázist alkot $\mathbb{R}^2$-ben, mert

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14 \neq 0$$

$\mathbb{R}^3$-ben csak 3 vektor alkothat bázist. Az $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ pontosan akkor alkot bázist, ha $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Pl. $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázist alkot, mert

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Általában $\mathbb{R}^m$-ben csak m db vektor alkothat bázist.

Ha $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, ..., $\underline{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix}$, akkor ezek a vektorok pontosan akkor alkotnak bázist, ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ha a V VT-ben a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\} = B$ vektorok bázist alkotnak (8.) akkor minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen írható $\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$ alakban. Ekkor $\underline{v}$ B-beli koordinátái:

$$(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

Pl. Határozza meg $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ koordinátáit a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ bázisban!

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -10 - (-9) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{ez tényleg bázis}$$

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 \iff \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ -3\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{pmatrix},$$

azaz
$$-2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 4$$
$$-3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 7$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1{,}5 & -2 \\ -3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1{,}5 & -2 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1{,}5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

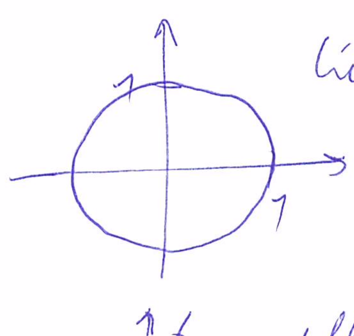
$$\alpha_1 - \overbrace{1{,}5\alpha_2}^{3} = -2 \Rightarrow \alpha_1 = 1$$
$$\alpha_2 = 2$$

$$(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

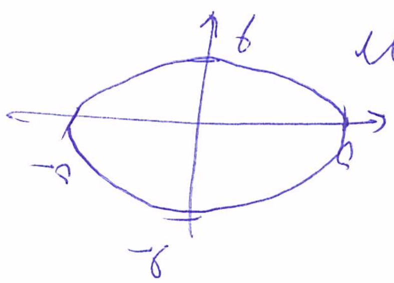
Miért kellenek különböző bázisok?

Pl. $\mathbb{R}^2$-ben határozza meg a derékszögű koordinátarendszerben azon $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pontok halmazát, melyre

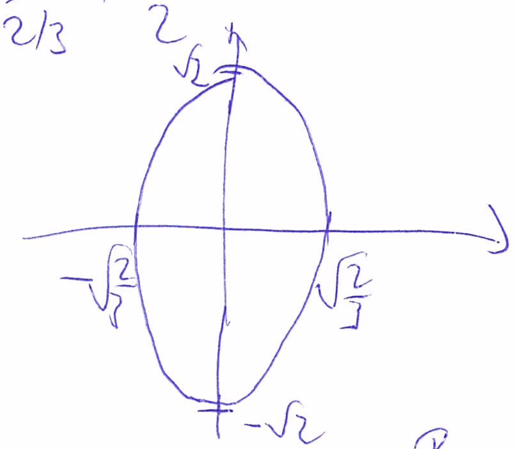
a) $x^2 + y^2 = 1$ kör



b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis

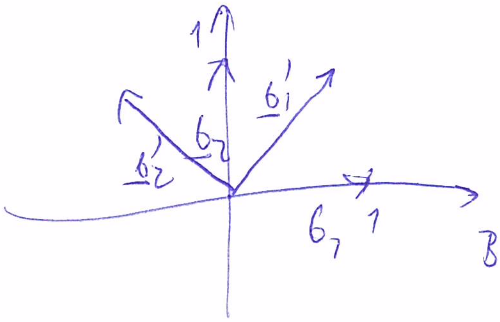


Pl. $\frac{x^2}{2/3}+\frac{y^2}{2}=1$ esetén $\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$



c) $x^2+xy+y^2=1$

Eredetileg a $\underbrace{b_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{B}$ által meghatározott koordinátarendszerben dolgoztunk. Forgassuk el ezt a koordinátarendszert 45°-kal az óramutató járásával ellentétesen!



$$B'\begin{cases} \underline{b}_1'=\begin{pmatrix}\cos 45^\circ\\ \sin 45^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\\ \underline{b}_2'=\begin{pmatrix}\cos 135^\circ\\ \sin 135^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\end{cases}$$

Ha $(\underline{v})_{B'}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, akkor $\underline{v}=x'\underline{b}_1'+y'\underline{b}_2'=x'\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}+y'\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\end{pmatrix}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

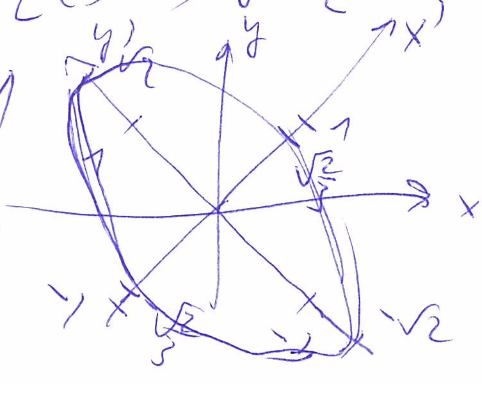
tehát akkor $(\underline{v})_B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\end{pmatrix}$. Tehát a feltétel:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2=1$$

$$\frac{1}{2}(x')^2-\cancel{x'y'}+\frac{1}{2}(y')^2+\frac{1}{2}(x')^2-\frac{1}{2}(y')^2+\frac{1}{2}(x')^2+\cancel{x'y'}+\frac{1}{2}(y')^2=1$$

$$\frac{3}{2}(x')^2+\frac{1}{2}(y')^2=1 \qquad \frac{(x')^2}{2/3}+\frac{(y')^2}{2}=1$$

az elforgatott koordinátarendszerben írják fel az ellipszist.



Def Legyen V egy VT. Ekkor az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k \in V$ vektorok lineárisan függetlenek (röviden: L), ha a $\lambda_1 \underline{f}_1 + \lambda_2 \underline{f}_2 + \dots + \lambda_k \underline{f}_k = \underline{0}$ egyenletnek csak a $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$ a megoldása.

Pl. $V = \mathbb{R}^3$, $\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ L:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ azaz } \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 0$

L

Def Legyen V egy VT. Ekkor a $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_m \in V$ vektorok generátorrendszert alkotnak, ha minden $\underline{v} \in V$ felírható $\underline{v} = \beta_1 \underline{g}_1 + \beta_2 \underline{g}_2 + \dots + \beta_m \underline{g}_m$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ alakban.

Tétel A V VT-ben $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ bázis $\Longleftrightarrow$ $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ L és G

Biz $\Rightarrow$ Tfh $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ bázis. Ekkor $\underline{0} = 0\underline{b}_1 + 0\underline{b}_2 + \dots + 0\underline{b}_n$ és mivel egyértelmű a felírás, ezért nincs más, tehát $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ L.

Mivel $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ bázis, ezért minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen felírható $\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$ alakban, tehát felírható, így G.

$\Leftarrow$ Tfh $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ L és G. Azt kell megmutatnunk, hogy B bázist alkot, tehát minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen írható $\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ alakban.

Mivel $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$ G, ezért létezik a

$\underline{v}=\alpha_1\underline{b}_1+\alpha_2\underline{b}_2+\dots+\alpha_n\underline{b}_n$

felírás. Tfh van egy másik felírás:

$\underline{v}=\alpha_1'\underline{b}_1+\alpha_2'\underline{b}_2+\dots+\alpha_n'\underline{b}_n$.

Ekkor $\underline{0}=\underline{v}-\underline{v}=\alpha_1\underline{b}_1+\alpha_2\underline{b}_2+\dots+\alpha_n\underline{b}_n-(\alpha_1'\underline{b}_1+\alpha_2'\underline{b}_2+\dots+\alpha_n'\underline{b}_n)=$

$(\alpha_1-\alpha_1')\underline{b}_1+(\alpha_2-\alpha_2')\underline{b}_2+\dots+(\alpha_n-\alpha_n')\underline{b}_n$.

Mivel $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n$ L $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\alpha_1-\alpha_1'=0\\ \alpha_2-\alpha_2'=0\\ \vdots\\ \alpha_n-\alpha_n'=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\alpha_1=\alpha_1'\\ \alpha_2=\alpha_2'\\ \vdots\\ \alpha_n=\alpha_n'\end{array}$ $\Rightarrow$ egyértelmű a felírás

~~Köv Ha V VT-ben $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$ é $B'=\{\underline{b}_1',\dots,\underline{b}_n'\}$ bázisok, akkor n=n'~~

~~Biz~~ Tétel Ha a V VT-ben $\underline{f}_1,\underline{f}_2,\dots,\underline{f}_k$ L és $\underline{g}_1,\underline{g}_2,\dots,\underline{g}_m$ G, akkor $k\le m$.

Köv Ha a V VT-ben $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$ és $B'=\{\underline{b}_1',\dots,\underline{b}_{n'}'\}$ bázisok, akkor $n=n'$.

Biz
$\left.\begin{array}{l}\text{Ha } B \text{ bázis} \Rightarrow B\ L\\ \text{Ha } B' \text{ bázis} \Rightarrow B'\ G\end{array}\right\} n\le n'$
$\left.\begin{array}{l}\text{Ha } B \text{ bázis} \Rightarrow B\ G\\ \text{Ha } B' \text{ bázis} \Rightarrow B'\ L\end{array}\right\} \Rightarrow n'\le n$
$\Rightarrow n\le n'\le n \Rightarrow n=n'$

Tehát a V VT-ben bármely két bázisban ugyanannyi vektor van.

Def A V VT dimenziója az a szám ahány vektort tartalmaz egy bázis. Jelölés: $\dim V$

A ~~bázis~~ dimenzió a szabadsági fokot mutatja meg.

Pl. $\dim \mathbb{R}^m = m$

$\dim \mathbb{R}^{m\times n} = m \cdot n$.

(*) 12/a, b oldalak

Skalárszorzatos vektortér

$\mathbb{R}^3$-ben az $\underline{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ olyan bázis, ahol a bázisvektorok hossza 1 és páronként egymásra merőlegesek.

Cél: A V VT-ben olyan $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ bázist keresünk, hogy a bázisvektorok hossza 1 és páronként egymásra merőlegesek.

Hogyan dönthető el $\mathbb{R}^3$-ben, hogy két vektor merőleges?

Az $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ merőleges vektorok $\Leftrightarrow$ $\underline{a}\,\underline{b} = 0$ (skaláris szorzat)

$|\underline{a}| = 1$ ($\underline{a}$ hossza 1) $\Leftrightarrow$ $\underline{a}\,\underline{a} = 1$.

Skaláris szorzat fogalmára van szükség a V VT-ben.

Az $\mathbb{R}^3$-beli skaláris szorzat az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1., minden $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén: $\underline{u}\,\underline{v} = \underline{v}\,\underline{u}$ (kommutativitás)

2., minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ esetén: $(\underline{u}+\underline{v})\underline{w} = \underline{u}\,\underline{w} + \underline{v}\,\underline{w}$ (disztributivitás)

3., minden $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ esetén $(\alpha \underline{u})\underline{v} = \alpha(\underline{u}\,\underline{v})$

4., minden $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ esetén $\underline{u}\,\underline{u} \geq 0$ és $\underline{u}\,\underline{u} = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$.

Ezt általánosítja a V VT-beli skaláris szorzat fogalma:

Az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

lineáris egyenletrendszer esetén az $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ vektorokat bevezetve az egyenletrendszer

$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \ldots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}$ alakba írható, tehát $\underline{b}$-t az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ lineáris kombinációjaként írjuk fel.

A lineáris egyenletrendszer megoldhatósága úgy is fogalmazható, hogy a $\underline{b}$ vektor benne van-e az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok által generált altérben.

~~Legyen~~ Az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix esetén a sorvektorok $\mathbb{R}^n$-ből, az oszlopvektorok $\mathbb{R}^m$-ből vannak. A sorok által generált altere $\mathbb{R}^n$-nek a sortér, az oszlopok által generált $\mathbb{R}^m$-beli altér az oszloptér.

<u>Tétel</u> dim(sortér) = dim(oszloptér)

<u>Def</u> A sortér dimenziója az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix rangja.

Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix rangját úgy számoljuk ki, hogy alkalmazzuk $\underline{\underline{A}}$-ra a Gauss-eliminációt és a végén kapott nem csupa 0-kat tartalmazó sorok száma az $\underline{\underline{A}}$ rangja.

Pl. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 18 \\ 0 & 3 & 9 \\ 4 & 10 & 22 \end{pmatrix}$ rang

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 18 \\ 0 & 3 & 9 \\ 4 & 10 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rang}(\underline{\underline{A}}) = 2.$$

Tétel Legyen $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1., $\underline{\underline{A}}$ invertálható
2., az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszernek csak az $\underline{x} = \underline{0}$ megoldása van
3., az $\underline{\underline{A}}$ sorműveletekkel $\underline{\underline{I}}_n$ egységmátrixxá alakítható
4., az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén megoldható
5., $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$
6., $\mathrm{rang}(\underline{\underline{A}}) = n$
7., az $\underline{\underline{A}}$ sorai lineárisan függetlenek
8., az $\underline{\underline{A}}$ oszlopai lineárisan függetlenek

Def Legyen V egy VT. Ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ hozzárendelünk egy $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ -vel jelölt számot az alábbi tulajdonságokkal:

1.) minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$

2.) minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ esetén $\langle \underline{u}+\underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

3.) minden $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\langle \alpha \underline{u}, \underline{v} \rangle = \alpha \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$

4.) Minden $\underline{u} \in V$ esetén $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$ és $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$.

Pl. 1. $\mathbb{R}^m$: $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$, $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_m v_m$

skaláris szorzat

1.) $$\left.\begin{aligned} \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_m v_m \\ \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_m u_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$$

2.) Ha $\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$, $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_m+v_m \end{pmatrix}$

$$\langle \underline{u}+\underline{v}, \underline{w} \rangle = (u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + \ldots + (u_m+v_m)w_m =$$
$$(u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_m w_m) + (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_m w_m) = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle.$$

3. $\alpha \underline{u} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_m \end{pmatrix}$, $\langle \alpha \underline{u}, \underline{v} \rangle = (\alpha u_1) v_1 + (\alpha u_2) v_2 + \ldots + (\alpha u_m) v_m =$

$$\alpha (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_m v_m) = \alpha \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$$

4.) $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = u_1 u_1 + u_2 u_2 + \ldots + u_m \cdot u_m = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_m^2 \geq 0$

$\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_m^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_m = 0$

$\Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$

2. $V = \{ f(x) : f(x)$ 2π szerint periodikus folytonos fv $\}$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \, dx.$$

$\mathbb{R}^3$-ban az $\underline{u}$ vektor normája: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}$

Def Ha V egy skalárszorzatos VT, akkor egy $\underline{u}\in V$ normája:

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u},\underline{u}\rangle}$$

Pl. $\mathbb{R}^m$, $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$, $\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_mv_m$

$$\langle \underline{u},\underline{u}\rangle = u_1^2+u_2^2+\ldots+u_m^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2$$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2}$$

~~Rdax~~ A norma tulajdonságai:

1.) $\|\underline{u}\| \geq 0$ minden $\underline{u}\in V$ esetén

2.) $\|\underline{u}\| = 0$ akkor és csak akkor ha $\underline{u} = \underline{0}$

3.) ha $\alpha\in\mathbb{R}$, $\underline{u}\in V$: $\|\alpha\underline{u}\| = |\alpha|\cdot\|\underline{u}\|$

4.) $\|\underline{u}+\underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$ (háromszög egyenlőtlenség)

Tétel Legyen V egy skalárszorzatos VT. Ekkor minden $\underline{u},\underline{v}\in V$ esetén $|\langle \underline{u},\underline{v}\rangle| \leq \|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|$.

Def Legyen V egy skalárszorzatos VT, $\underline{u}\neq\underline{0}$, $\underline{v}\neq\underline{0}$. Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által bezárt szög $0\leq\alpha\leq 180°$, ha

$$\cos\alpha = \frac{\langle \underline{u},\underline{v}\rangle}{\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|}.$$

Megj: Mivel $\underline{u}\neq\underline{0}$, $\underline{v}\neq\underline{0}$, ezért $\|\underline{u}\|\neq 0$, $\|\underline{v}\|\neq 0$ és $|\langle \underline{u},\underline{v}\rangle| \leq \|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|$ miatt $-1 \leq \dfrac{\langle \underline{u},\underline{v}\rangle}{\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|} \leq 1$.

(15.)

Pl. $\mathbb{R}^4$: $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$, $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle} = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2$

$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} = \sqrt{1^2+1^2+0^2+0^2} = \sqrt{2}$

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2$$

Így $\cos\alpha = \dfrac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} = \dfrac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$\mathbb{R}^3$-ben: $\underline{u}, \underline{v}$ merőleges $\Leftrightarrow$ $\underline{u}\underline{v} = 0$

<u>Def</u> ~~Az~~ Legyen V egy skalárszorzatos VT. Az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok ortogonálisak, ha $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$.

<u>Tétel</u> Legyen V egy skalárszorzatos VT. Ha a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok páronként ortogonálisak, akkor lineárisan függetlenek.

Pl. $V = \{ f(x) : f(x)\ 2\pi$ szerint periodikus folytonos fv$\}$

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots$

függvények ortogonálisak, ha $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$

ezért kell minden tag az $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

Fourier-sorban.

<u>Tétel</u> Legyen V egy skalárszorzatos VT, $\dim V = n$. Ekkor létezik $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ bázis, melyben a bázisvektorok páronként merőlegesek.

<u>Def</u> Az olyan bázist, ahol a bázisvektorok páronként ortogonálisak, ortogonális bázisnak hívjuk.

Ha $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ ortogonális bázis, akkor $\frac{\underline{b}_1}{\|\underline{b}_1\|}, \frac{\underline{b}_2}{\|\underline{b}_2\|}, \dots, \frac{\underline{b}_n}{\|\underline{b}_n\|}$ szintén ortogonális bázis és itt már a vektorok hossza $=1$.

<u>Def</u> Legyen V egy skalárszorzatos vektortér, $\dim V = n$.
Ha $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ ortogonális bázis és $\|\underline{b}_i\| = 1$ ha $1 \le i \le n$, akkor $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ ortonormált bázis (ONB).

<u>Tétel</u> Legyen $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ egy ONB, $(\underline{u})_B = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, azaz $u = u_1\underline{b}_1 + u_2\underline{b}_2 + \dots + u_n\underline{b}_n$, $\underline{v} = v_1\underline{b}_1 + v_2\underline{b}_2 + \dots + v_n\underline{b}_n$.
Akkor $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$

<u>Biz</u> Mivel $b_1, b_2, \dots, b_n$ ONB, ezért $\langle \underline{b}_i, \underline{b}_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \ne j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle u_1\underline{b}_1 + u_2\underline{b}_2 + \dots + u_nb_n, v_1\underline{b}_1 + v_2\underline{b}_2 + \dots + v_nb_n \rangle =$$
$$u_1v_1\overbrace{\langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle}^{1} + u_1v_2\overbrace{\langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle}^{0} + \dots + u_1v_n\overbrace{\langle \underline{b}_1, \underline{b}_n \rangle}^{0} +$$
$$u_2v_1\overbrace{\langle \underline{b}_2, \underline{b}_1 \rangle}^{0} + u_2v_2\overbrace{\langle \underline{b}_2, \underline{b}_2 \rangle}^{1} + \dots + u_2v_n\overbrace{\langle \underline{b}_2, \underline{b}_n \rangle}^{0} +$$
$$\vdots$$
$$u_nv_1\underbrace{\langle \underline{b}_n, \underline{b}_1 \rangle}_{0} + u_nv_2\underbrace{\langle \underline{b}_n, \underline{b}_2 \rangle}_{0} + \dots + u_nv_n\underbrace{\langle \underline{b}_n, \underline{b}_n \rangle}_{1} =$$
$$u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

Legyen V-ben a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\} = B$ és $\{\underline{b}_1', \underline{b}_2', \dots, \underline{b}_n'\} = B'$ két ortonormált bázis. Legyen

$$(\underline{b}_1')_B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, (\underline{b}_2')_B = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \dots, (\underline{b}_n') = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2i} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ni} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

(17)

$\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{P}}$:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots \\ b_{1i} & b_{2i} & \dots & b_{ni} \\ \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

i-dik → ; ← j-edik oszlop

$$(\underline{b}_i')_B = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}, \quad (\underline{b}_j')_B = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$b_{1i} b_{1j} + b_{2i} b_{2j} + \dots + b_{ni} b_{nj} = \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ ONB}}}{=} \langle b_i', b_j' \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ B' \text{ ONB}}}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ 1 & \text{ha } i = j \end{cases}$$

Tehát $\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}_n$, azaz $\underline{\underline{P}}$ inverze $\underline{\underline{P}}^T$.

<u>Def</u> Ha $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan ~~az~~ invertálható mátrix, amire $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T$, akkor $\underline{\underline{A}}$-t ortogonális mátrixnak hívjuk.

<u>Tétel</u> Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ortogonális, ha oszlopvektorai $\mathbb{R}^n$ ONB-t alkotják.

Pl. $\mathbb{R}^{2\times 2}$:
$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{3\times 3}$:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$