

10. MATEMATIKA A2 FELADATSOR

1. Diagonalizálja az alábbi $n \times n$ -es mátrixokat ha lehet. Ha lehet diagonalizálni, akkor határozza meg a 100-adik hatványukat!

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

A sajátvektorok: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\lambda_1 = 4 : \underline{s_1} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}$
és $\lambda_2 = -2 : \underline{s_2} = \begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}$. Ha $u = 1$, akkor $\underline{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ha $v = 1$, akkor $\underline{p_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Így

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

ahol

$$\underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \underline{D}.$$

$$\underline{A}^{100} = \underline{P} \underline{D}^{100} \underline{P}^{-1}, \text{ ahol}$$

$$\underline{D}^{100} = \begin{pmatrix} 4^{100} & 0 \\ 0 & (-2)^{100} \end{pmatrix},$$

ezért

$$\underline{A}^{100} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}4^{100} + \frac{1}{2}2^{100} & \frac{1}{2}4^{100} - \frac{1}{2}2^{100} \\ \frac{1}{2}4^{100} - \frac{1}{2}2^{100} & \frac{1}{2}4^{100} + \frac{1}{2}2^{100} \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

A sajátvektorok: $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 1$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\lambda_1 = 8 : \underline{s_1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}u \\ u \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}$
és $\lambda_2 = 1 : \underline{s_2} = \begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}$. Ha $u = 2$, akkor $\underline{p_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, ha $v = 1$, akkor $\underline{p_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Így

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix},$$

ahol

$$\underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{D}.$$

$$\underline{A}^{100} = \underline{P} \underline{D}^{100} \underline{P}^{-1}, \text{ ahol}$$

$$\underline{D}^{100} = \begin{pmatrix} 8^{100} & 0 \\ 0 & 1^{100} \end{pmatrix},$$

ezért

$$\underline{A}^{100} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}8^{100} + \frac{2}{7} & \frac{5}{7}8^{100} - \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7}8^{100} - \frac{2}{7} & \frac{2}{7}8^{100} + \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

A sajátvektorok: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 0$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\lambda_1 = 7 : \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 3u \\ u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ és $\lambda_2 = 0 : \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}v \\ v \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}$. Ha $u = 1$, akkor $\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ha $v = 2$, akkor $\underline{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Így

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix},$$

ahol

$$\underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}.$$

$$\underline{\underline{A}}^{100} = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{D}}^{100} \underline{\underline{P}}^{-1}, \text{ ahol}$$

$$\underline{\underline{D}}^{100} = \begin{pmatrix} 7^{100} & 0 \\ 0 & 0^{100} \end{pmatrix},$$

ezért

$$\underline{\underline{A}}^{100} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} 7^{100} & \frac{3}{7} 7^{100} \\ \frac{2}{7} 7^{100} & \frac{1}{7} 7^{100} \end{pmatrix}$$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

Csak egy sajátvektor van: $\lambda_1 = 1$. A hozzá tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} -u \\ u \end{pmatrix}$. Mivel csak egy paraméter van benne, ezért nincs két lineárisan független sajátvektor, nem lehet diagonalizálni.

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mivel a mátrix egy diagonális mátrix, emiatt a saját maga a diagonalizáltja. Mivel az egységmátrixról van szó, emiatt saját maga lesz a 100-dik hatványa.

(f) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

A sajátvektorok: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = 1$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\lambda_1 = 6 : \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ és $\lambda_2 = 2 : \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}$ és $\lambda_3 = 1 : \underline{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix}$, $w \in \mathbb{R}$. Ha $u = 1$,

akkor $\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ha $v = 1$, akkor $\underline{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és ha $w = 1$, akkor $\underline{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Így

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol

$$\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}.$$

$$\underline{\underline{A}}^{100} = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{D}}^{100}\underline{\underline{P}}^{-1}, \text{ ahol}$$

$$\underline{\underline{D}}^{100} = \begin{pmatrix} 6^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{100} \end{pmatrix},$$

ezért

$$\underline{\underline{A}}^{100} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}6^{100} + \frac{1}{2}2^{100} & 0 & \frac{1}{2}6^{100} - \frac{1}{2}2^{100} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}6^{100} - \frac{1}{2}2^{100} & 0 & \frac{1}{2}6^{100} + \frac{1}{2}2^{100} \end{pmatrix}$$

$$(g) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

A sajátvektorok: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = -3$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\lambda_1 = 0$:

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} u \\ 2u \\ u \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R} \text{ és } \lambda_2 = 2 : \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}v \\ \frac{6}{7}v \\ v \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R} \text{ és } \lambda_3 = -3 : \underline{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}w \\ w \end{pmatrix}, w \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ha } u = 1, \text{ akkor } \underline{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ha } v = 7, \text{ akkor } \underline{p}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ és ha } w = 2, \text{ akkor } \underline{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lineárisan független vektorok, mivel különböző sajátértékekhez tartoznak. Így

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

ahol

$$\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}.$$

$$\underline{\underline{A}}^{100} = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{D}}^{100}\underline{\underline{P}}^{-1}, \text{ ahol}$$

$$\underline{\underline{D}}^{100} = \begin{pmatrix} 0^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{100} \end{pmatrix},$$

ezért

$$\underline{\underline{A}}^{100} = \begin{pmatrix} \frac{15}{10}2^{100} & -2^{100} & \frac{5}{10}2^{100} \\ \frac{18}{10}2^{100} - \frac{4}{5}3^{100} & -\frac{6}{5}2^{100} + \frac{1}{5}3^{100} & \frac{6}{10}2^{100} + \frac{2}{5}3^{100} \\ \frac{21}{10}2^{100} - \frac{8}{5}3^{100} & -\frac{7}{5}2^{100} + \frac{3}{5}3^{100} & \frac{7}{10}2^{100} + \frac{4}{5}3^{100} \end{pmatrix}$$

$$(h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A sajátvektorok: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\lambda_1 = 1 : \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} v \\ -u \\ u \end{pmatrix}$,
 $u, v \in \mathbb{R}$ és $\lambda_2 = 2 : \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ w \end{pmatrix}$, $w \in \mathbb{R}$. Ha $u = 1$ és $v = 0$, akkor $\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ha $u = 0$ és
 $v = 1$, akkor $\underline{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és ha $w = 2$, akkor $\underline{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lineárisan független vektorok. Így

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

ahol

$$\underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}.$$

$\underline{\underline{A}}^{100} = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{D}}^{100} \underline{\underline{P}}^{-1}$, ahol

$$\underline{\underline{D}}^{100} = \begin{pmatrix} 1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{100} \end{pmatrix},$$

ezért

$$\underline{\underline{A}}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} 3^{100} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} 3^{100} \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} 3^{100} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} 3^{100} \end{pmatrix}$$

2. Ábrázolja az alábbi egyenleteknek eleget tevő pontokat! Az új tengelyeket és rajta a tengelymetszeteket pontosan tüntesse fel!

(a) $x^2 + xy + y^2 = 1$

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$, aminek sajátértékei $\lambda_1 = 0,5$ és $\lambda_2 = 1,5$.

A hozzájuk tartozó sajátvektork: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} -u \\ u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ és $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}$. Egység hosszúságú

sajátvektorokat kapunk, ha $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $v = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ és $\underline{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Ebben az

új koordinátarendszerben az egyenlet $0,5(x')^2 + 1,5(y')^2 = 1$, azaz $\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y')^2}{(\frac{\sqrt{2}}{3})^2} = 1$ egyenletű ellipszis.

(b) $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, aminek sajátértékei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 5$. A

hozzájuk tartozó sajátvektork: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} -u \\ u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ és $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}$. Egység hosszúságú

sajátvektorokat kapunk, ha $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $v = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ és $\underline{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Ebben

az új koordinátarendszerben az egyenlet $1(x')^2 + 5(y')^2 = 1$, azaz $\frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{(\sqrt{0,2})^2} = 1$ egyenletű ellipszis.

(c) $6x^2 + 12xy + y^2 = 1$

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix: $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, aminek sajátértékei $\lambda_1 = 10$ és $\lambda_2 = -3$. A hozzájuk tartozó sajátvektork: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}u \\ u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ és $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}v \\ v \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}$. Egység hosszúságú sajátvektorokat kapunk, ha $u = \frac{2}{\sqrt{13}}$ és $v = \frac{3}{\sqrt{13}}$, tehát $\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ és $\underline{p}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$. Ebben az új koordinátarendszerben az egyenlet $10(x')^2 - 3(y')^2 = 1$, azaz $\frac{(x')^2}{(\sqrt{0,1})^2} + \frac{(y')^2}{(\sqrt{\frac{1}{3}})^2} = 1$ egyenletű ellipszis.

(d) $17x^2 + 8xy + 2y^2 = 1$

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix: $\begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, aminek sajátértékei $\lambda_1 = 18$ és $\lambda_2 = 1$. A hozzájuk tartozó sajátvektork: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 4u \\ u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ és $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}v \\ v \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}$. Egység hosszúságú sajátvektorokat kapunk, ha $u = \frac{1}{\sqrt{17}}$ és $v = \frac{4}{\sqrt{17}}$, tehát $\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$ és $\underline{p}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$. Ebben az új koordinátarendszerben az egyenlet $18(x')^2 + 1(y')^2 = 1$, azaz $\frac{(x')^2}{(\sqrt{\frac{1}{18}})^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1$ egyenletű ellipszis.