

9. MATEMATIKA A2 FELADATSOR

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ -et és rajta az ún. euklideszi skalár szorzatot, azaz $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ esetén $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$. A rövidség miatt most a vektorokat sorvektorként írjuk. Határozzuk meg az $\underline{u}$ és a $\underline{v}$ vektorok által bezárt szöget:
 - (a) $\underline{u} = (1, -3)$, $\underline{v} = (2, 4)$
 - (b) $\underline{u} = (-1, 0)$, $\underline{v} = (3, 8)$
 - (c) $\underline{u} = (-1, 5, 2)$, $\underline{v} = (2, 4, -9)$
 - (d) $\underline{u} = (4, 1, 8)$, $\underline{v} = (1, 0, -3)$
 - (e) $\underline{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\underline{v} = (-3, -3, -3, -3)$
 - (f) $\underline{u} = (2, 1, 7, -1)$, $\underline{v} = (4, 0, 0, 0)$
2. Határozza meg az $\underline{a} = (1, 1, 1, 1)$ és a $\underline{b} = (1, 1, 1, 0)$, $\underline{c} = (1, 1, 0, 0)$, $\underline{d} = (1, 0, 0, 0)$ vektorok között lévő szögeket a szokásos, euklideszi skalár szorzattal.
3. Határozza meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy a $\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, 1, -1, a)$ és $\underline{v}_3 = (1, -1, b, c)$ vektorok ortogonálisak legyenek!
4. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ -at az euklideszi skalár szorzással. Az alábbiak közül melyek ortonormált vektorhalmazok?
 - (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
 - (b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
 - (c) $(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1)$
 - (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
5. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyek ortogonálisak!
 - (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - (b) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
 - (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
6. Határozza meg az $\mathbb{R}^2$ természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát és írja fel a mátrixok segítségével a $P(3, 2)$ pont képeit!:
 - (a) az $y = x$ egyenesre tükrözés;
 - (b) az $y = -x$ egyenesre tükrözés;
 - (c) az O -ra való tükrözés;
 - (d) az O körüli 45° -os forgatás az óramutató járására ellentétesen;
 - (e) az O körüli 120° -os forgatás az óramutató járására megegyezően.

7. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:

- (a) az $y = x$ síkra tükrözés;
- (b) az x, y síkra vetítés;
- (c) a z tengely körüli 60° -os forgatás.
- (d) Határozza meg a mátrixok segítségével a $P(1, 1, 1)$ pont képeit!

8. Határozza meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!

- (a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- (e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Határozza meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{pmatrix}$