

9. MATEMATIKA A2 FELADATSOR - MEGOLDÁSOK

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ -et és rajta az ún. euklideszi skalár szorzatot, azaz $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ esetén

$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$. A rövidség miatt most a vektorokat sorvektorként írjuk. Határozzuk meg az $\underline{u}$ és a $\underline{v}$ vektorok által bezárt szöveget:

(a) $\underline{u} = (1, -3), \underline{v} = (2, 4)$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{10}, \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{18}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 - 12}{\sqrt{180}} = -\frac{5}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = 138, 19^\circ$$

(b) $\underline{u} = (-1, 0), \underline{v} = (3, 8)$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{1} = 1, \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{73}$$

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{73}} \Rightarrow \alpha = 110, 55^\circ$$

(c) $\underline{u} = (-1, 5, 2), \underline{v} = (2, 4, -9)$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{30}, \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{101}$$

$$\cos \alpha = \frac{-2 + 20 - 18}{\sqrt{3030}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

(d) $\underline{u} = (4, 1, 8), \underline{v} = (1, 0, -3)$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{81} = 9, \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{4 + 0 - 24}{9\sqrt{10}} = -\frac{20}{9\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 134, 64^\circ$$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{2}, \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{-3 - 0 - 3 - 0}{6\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

(e) $\underline{u} = (2, 1, 7, -1), \underline{v} = (4, 0, 0, 0)$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{55}, \|\underline{v}\| = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \alpha = \frac{8 + 0 + 0 + 0}{4\sqrt{55}} = \frac{2}{\sqrt{55}} \Rightarrow \alpha = 74, 35^\circ$$

2. Határozza meg az $\underline{a} = (1, 1, 1, 1)$ és a $\underline{b} = (1, 1, 1, 0)$, $\underline{c} = (1, 1, 0, 0)$, $\underline{d} = (1, 0, 0, 0)$ vektorok között lévő szöveget a szokásos, euklideszi skalár szorzattal.

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{4} = 2, \quad \|\underline{b}\| = \sqrt{3}, \quad \|\underline{c}\| = \sqrt{2}, \quad \|\underline{d}\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos(a, b) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 30^\circ.$$

$$\cos(a, c) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 45^\circ$$

$$\cos(a, d) = \frac{1}{2} \Rightarrow 60^\circ$$

$$\cos(b, c) = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow 35, 26^\circ$$

$$\cos(b, d) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 54, 74^\circ$$

$$\cos(c, d) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 45^\circ$$

3. Határozza meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy a $\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, 1, -1, a)$ és $\underline{v}_3 = (1, -1, b, c)$ vektorok ortogonálisak legyenek!

A vektorok akkor ortogonálisak, ha merőlegesek egymásra. Azaz azt kell ellenőriznünk, hogy a megfelelő euklidészi skaláris szorzatok 0-k legyenek.

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = 1 + 1 - 1 - a = 0, \Rightarrow a = -1$$

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle = b + c = 0$$

$$\langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = -b - c = 0$$

A fenti egyenletekből azt látjuk, hogy a b és c paraméterek között a következő kapcsolat áll fenn: $b = -c$. Azaz a feladat megoldása: $a = -1$, míg $b = -c$, ahol b értéke szabadon megválasztható.

4. Tekintsük az R^3 -at az euklidészi skalár szorzással. Az alábbiak közül melyek ortonormált vektorhalmazok?

Egy vektorhalmaz akkor ortonormált, ha a benne lévő vektorok páronként merőlegesek egymásra, és a hosszuk 1.

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

A fenti vektorhalmaz nem lesz ortonormált, mert a b és c vektorok nem lesznek merőlegesek egymásra. Ugyanis

$$\langle \underline{b}, \underline{c} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 0.$$

(b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

A fenti vektorhalmaz ortonormált. A vektorok páronként merőlegesek, és egység hosszúak.

(c) $(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1)$

fenti vektorhalmaz nem ortonormált, ugyanis a b és c vektorok nem merőlegesek egymásra. Ugyanis

$$\langle \underline{b}, \underline{c} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

(d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

A fenti vektorhalmaz ortonormált. Ugyanis bármely két vektor merőleges egymásra, és a hosszuk 1.

5. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyek ortogonálisak!

Definíció alapján egy $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix akkor lesz ortogonális, ha $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{I}}_n$.

$$(a) \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{I}}_2,$$

tehát ortogonális

$$(b) \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{I}}_2$$

Tehát a $\underline{\underline{B}}$ mátrix ortogonális.

$$(c) \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}\underline{\underline{C}}^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq \underline{\underline{I}}_3$$

Tehát a $\underline{\underline{C}}$ mátrix nem ortogonális.

6. Határozza meg az $\mathbb{R}^2$ természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát és írja fel a mátrixok segítségével a $P(3, 2)$ pont képeit!

$$\text{Legyen } \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) az $y = x$ egyenesre tükrözés;

$$\text{Az } \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{i}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{j}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tehát a keresett transzformációs mátrix: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) az $y = -x$ egyenesre tükrözés;

$$\text{Az } \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{i}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{j}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tehát a keresett transzformációs mátrix: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(c) az O -ra való tükrözés;

$$\text{Az } \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{i}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tehát a keresett transzformációs mátrix: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(d) az O körüli 45° -os forgatás az óramutató járására ellentétesen;

$$\text{Az } \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{i}) = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{j}) = \begin{pmatrix} \cos 135^\circ \\ \sin 135^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tehát a keresett transzformációs mátrix: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(e) az O körüli 120° -os forgatás az óramutató járására megegyezően.

$$\text{Az } \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{i}) = \begin{pmatrix} \cos(-120^\circ) \\ \sin(-120^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{j}) = \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tehát a keresett transzformációs mátrix: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

7. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát, majd írja fel a $P(1, 1, 1)$ pont képeit!

$$\text{Legyen } \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) az $y = x$ síkra tükrözés;

$$\text{Az } \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{i}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{j}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tehát a keresett transzformációs mátrix: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) az x, y síkra vetítés;

$$\text{Az } \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tehát a keresett transzformációs mátrix: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) a z tengely pozitív fele felől nézve a z körüli 60° -os óramutató járásával ellentétes forgatás.

$$\text{Az } \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bázisvektor képe: } T(\underline{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 150^\circ \\ \sin 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tehát a keresett transzformációs mátrix: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

8. Határozza meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!

$$(a) \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

A mátrix sajátértékének kiszámításához először is meg kell határoznunk a karakterisztikus polinomot. Azaz

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}_2) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 8 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

A mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei. Azaz ezen mátrix esetében a sajátértékek: $\lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = -1$.

A sajátvektorok meghatározása a következők alapján történik: $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}_2)\underline{v} = \underline{0}$

$\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenlerendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $x = 0, 5t$. Ha $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, akkor $x = 0, 5t$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 0, 5t \\ t \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenlerendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $x = 0$, y értéke pedig tetszőleges.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

(b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 10 - \lambda & -9 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-36) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0,$$

tehát egy sajátérték van: $\lambda_1 = 4$.

$\lambda_1 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azt kapjuk megoldásként, hogy $x = \frac{3}{2}y$. Ha $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, akkor $x = 1, 5t$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1, 5t \\ t \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 2 \\ 8 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16 = 0,$$

tehát a sajátértékek: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$.

$\lambda_1 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azt kapjuk megoldásként, hogy $x = \frac{1}{2}y$. Ha $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, akkor $x = 0, 5t$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 0, 5t \\ t \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = -4$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azt kapjuk megoldásként, hogy $x = -\frac{1}{2}y$. Ha $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, akkor $x = -0, 5t$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} -0, 5t \\ t \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -7 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(2 - \lambda) - (-7) = 3 + \lambda^2 = 0,$$

aminek nincs valós gyöke, emiatt nincs sajátvektor sem.

$$(e) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0,$$

tehát a sajátérték: $\lambda_1 = 0$.

$\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azt kapjuk megoldásként, hogy x -et és y -t is szabadon választhatjuk, azaz $x = s$. Ha $y = t$, $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\text{tehát } \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0,$$

tehát egy sajátérték van: $\lambda_1 = 1$.

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azt kapjuk megoldásként, hogy x -et és y -t is szabadon választhatjuk, azaz $x = s$. Ha $y = t$, $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\text{tehát } \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

9. Határozza meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A determinánst az első sor szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} (1-\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0,$$

tehát a sajátértékek: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$.

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azt kapjuk megoldásként, hogy $z = 0$, $y = 0$, és $x = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azt kapjuk megoldásként, hogy $x = 0$ és $y = z$, azaz $y = z = s$, ahol $s \in \mathbb{R}$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azt kapjuk megoldásként, hogy $x = 0$ és $y = -z$, azaz $z = u$ esetén $y = -u$, ahol $u \in \mathbb{R}$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ u \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0,$$

tehát egy sajátérték van: $\lambda_1 = 1$

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tehát x, y és z is szabadon választható. $x = s, y = t, z = u$, ahol $s, t, u \in \mathbb{R}$. Tehát a sajátvektorok:

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}.$$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -2\lambda + \lambda^3 = \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

A mátrix sajátértékei a karkarakterisztikus polinom gyökei. A sajátértékek: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$.

$\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 5s \\ s \\ 3s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = \sqrt{2}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3-\sqrt{2}}t \\ \frac{3+\sqrt{2}}{7(\sqrt{2}+1)}t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_3 = -\sqrt{2}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3+\sqrt{2}}u \\ \frac{3-\sqrt{2}}{7(-\sqrt{2}+1)}u \\ u \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}$.

$$(d) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -6 & -2-\lambda & 0 \\ 19 & 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -8 - \lambda - 8\lambda^2 - \lambda^3 = -(8 + \lambda)(1 + \lambda^2) = 0$$

A valós sajátérték: $\lambda_1 = -8$.

$\lambda_1 = -8$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{s}{6} \\ -\frac{s}{6} \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$.