

1. (a) (3 pont) Definiálja az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix inverzét!

Megoldás:

Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix inverze az az $\underline{\underline{A}}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, amelyre teljesül, hogy

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}},$$

ahol $\underline{\underline{I}}$ az $n \times n$ -es egységmátrix.

- (b) (3 pont) Adjon a determináns fogalmát használva szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix invertálható legyen!

Megoldás:

Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$.

- (c) (3 pont) Határozza meg az $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét!

Megoldás:

A determináns:

$$\det(\underline{\underline{A}}) = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2.$$

Mivel a determináns nem nulla, a mátrix invertálható. Az inverz mátrix:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{A}})} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) (3 pont) Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k$ vektorok lineárisan függetlenek a V vektortérben!

Megoldás:

Az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k$ vektorok lineárisan függetlenek a V vektortérben, ha a

$$\lambda_1 \underline{f}_1 + \lambda_2 \underline{f}_2 + \dots + \lambda_k \underline{f}_k = \underline{0}$$

(ahol $\underline{0}$ a V nullvektora) lineáris kombináció csak akkor teljesül, ha minden λ_i skalár nullával egyenlő, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

- (b) (3 pont) Definiálja, hogy a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ vektorok mikor alkotnak bázist a V vektortérben!

Megoldás:

A $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ vektorok bázist alkotnak a V vektortérben, ha minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen írható $\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots + \lambda_n \underline{b}_n$ alakba.

- (c) (3 pont) Lineárisan függetlenek-e: $\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Megoldás:

A vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 \underline{f}_1 + \lambda_2 \underline{f}_2 + \lambda_3 \underline{f}_3 = \underline{0}$ egyenletnek csak a triviális ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$) megoldása létezik. Ezt Gauss-eliminációval vizsgáljuk. A vektorokból mint oszlopvektorokból képzett mátrixon végezzük el az eliminációt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Az elimináció lépései:

- i. $S_2 \leftarrow S_2 - 2S_1$
- ii. $S_3 \leftarrow S_3 - 3S_1$

Ekkor a mátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Következő lépések:

- i. $S_3 \leftarrow S_3 + S_2$
- ii. $S_4 \leftarrow S_4 - 2S_2$

Ekkor a mátrix lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

A lépcsős alakból leolvasható, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van (a harmadik oszlophoz nem tartozik vezéregyes, így λ_3 szabad paraméter). Mivel létezik nemtriviális megoldás, a vektorok nem lineárisan függetlenek.

3. (a) (3 pont) Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ egy korlátos tartomány, az $f(x, y, z)$ pedig egy D -n értelmezett függvény. Definiálja az $\iiint_D f(x, y, z) dV$ hármasintegrált!

Megoldás:

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ egy korlátos tartomány, és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Osszuk fel a D tartományt az $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$ és $g = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_p = h$ darab kis D_{ijk} résztartományokra, melyek D -vel metszetének térfogata ΔV_{ijk} . Válasszunk minden D_i részből egy tetszőleges (x_i^*, y_i^*, z_i^*) pontot. Az f függvény hármasintegrálja a D tartományon a következő határérték (amennyiben létezik és független a felosztástól és a pontválasztástól):

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{n, m, p \rightarrow \infty \\ \max(\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k) \rightarrow 0}} \sum_{i, j, k} f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \mu_{ijk}) \Delta V_{ijk}.$$

- (b) (2 pont) Mi a fizikai jelentése az $\iiint_D f(x, y, z) dV$ hármasintegrálnak, ha $f(x, y, z) > 0$?

Megoldás:

Ha $f(x, y, z) > 0$ a D tartomány pontjaiban a test sűrűségét jelöli az (x, y, z) pontban, akkor az $\iiint_D f(x, y, z) dV$ integrál a D tartományt kitöltő test össztömegét adja meg. Ha $f(x, y, z) = 1$, akkor az integrál a D tartomány térfogatát adja.

4. (6 pont) Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (5x + 3)^n$ hatványsor konvergenciatartományát!

Megoldás:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (5x + 3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(5 \left(x + \frac{3}{5} \right) \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} \left(x + \frac{3}{5} \right)^n$$

Az együttható $a_n = \frac{5^n}{n}$, a középpont $a = -\frac{3}{5}$. A konvergenciasugár:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n/n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{5}.$$

A sor konvergens, ha $-\frac{4}{5} < x < -\frac{2}{5}$. Végpontok vizsgálata:

- Ha $x = -\frac{2}{5}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a p -szabály szerint divergens.
- Ha $x = -\frac{4}{5}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Mivel $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$, monoton csökkenve tart a 0-hoz, ezért a Leibniz-kritérium alapján konvergens.

A konvergenciatartomány: $[-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$.

5. (a) (4 pont) Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ -beli $y = z$ síkra tükrözés transzformációmátrixát a természetes bázisban!

Megoldás:

A természetes bázis vektorai $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. A bázisvektorok képei:

$$T(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\underline{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A transzformációmátrix oszlopai ezek a képvektorok:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) (2 pont) Határozza meg a $\underline{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ pont képét a transzformációmátrixot használva!

Megoldás:

A $\underline{P}$ pont képe $\underline{P}' = \underline{T}\underline{P}$.

$$\begin{aligned} \underline{P}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A pont képe tehát $(3, 4, 2)$.

6. Legyen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) (4 pont) Határozza meg az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás:

Karakterisztikus egyenlet: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 9 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot 9 \\ &= 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 18 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0. \end{aligned}$$

A gyökök: $\lambda_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-14)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$. Így a sajátértékek: $\lambda_1 = \frac{5+9}{2} = 7$ és $\lambda_2 = \frac{5-9}{2} = -2$.

Sajátvektor $\lambda_1 = 7$ -hez: $(\underline{\underline{A}} - 7\underline{\underline{I}})\underline{s}_1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1-7 & 2 \\ 9 & 4-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből $-6x + 2y = 0 \implies x = \frac{y}{3}$. A sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Például $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Sajátvektor $\lambda_2 = -2$ -hez: $(\underline{\underline{A}} - (-2)\underline{\underline{I}})\underline{s}_2 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & 2 \\ 9 & 4-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből $3x + 2y = 0 \implies x = -\frac{2}{3}y$. A sajátvektorok: $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Például $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- (b) (4 pont) Határozza meg az $\underline{\underline{A}}^{37}$ mátrixot!

Megoldás:

Felhasználjuk a diagonalizációt: $\underline{\underline{A}}^{37} = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{D}}^{37}\underline{\underline{P}}^{-1}$. A sajátvektorokból képzett mátrix $\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. A diagonális mátrix $\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\det(\underline{\underline{P}}) = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 3 = -3 - 6 = -9$.

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 \\ 1/3 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{D}}^{37} = \begin{pmatrix} 7^{37} & 0 \\ 0 & (-2)^{37} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\underline{\underline{A}}^{37} = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{D}}^{37}\underline{\underline{P}}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}^{37} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^{37} & 0 \\ 0 & (-2)^{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 \\ 1/3 & -1/9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 7^{37} + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2)^{37} \\ 3 \cdot 7^{37} - 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 - 3 \cdot (-2)^{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 \\ 1/3 & -1/9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7^{37} & 2(-2)^{37} \\ 3 \cdot 7^{37} & -3(-2)^{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 \\ 1/3 & -1/9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}7^{37} + \frac{2}{3}(-2)^{37} & \frac{2}{9}7^{37} - \frac{2}{9}(-2)^{37} \\ \frac{3}{3}7^{37} - \frac{3}{3}(-2)^{37} & \frac{6}{9}7^{37} + \frac{3}{9}(-2)^{37} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(7^{37} + 2(-2)^{37}) & \frac{2}{9}(7^{37} - (-2)^{37}) \\ 7^{37} - (-2)^{37} & \frac{1}{3}(2 \cdot 7^{37} + (-2)^{37}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Megjegyzés: $(-2)^{37} = -2^{37}$.)

$$\underline{\underline{A}}^{37} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(7^{37} - 2 \cdot 2^{37}) & \frac{2}{9}(7^{37} + 2^{37}) \\ 7^{37} + 2^{37} & \frac{1}{3}(2 \cdot 7^{37} - 2^{37}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(7^{37} - 2^{38}) & \frac{2}{9}(7^{37} + 2^{37}) \\ 7^{37} + 2^{37} & \frac{1}{3}(2 \cdot 7^{37} - 2^{37}) \end{pmatrix}.$$

7. (7 pont) Határozza meg az $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 6y + 8$ függvény lokális szélsőértékeit! A szélsőérték jellegét is meg kell határozni!

Megoldás:

Parciális deriváltak:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 6y + 8) = 4x + 2y - 10$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 6y + 8) = 2x + 2y - 6$$

Stacionárius pontok keresése ($f_x = 0, f_y = 0$):

$$4x + 2y - 10 = 0 \implies 2x + y = 5$$

$$2x + 2y - 6 = 0 \implies x + y = 3$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat: $(2x + y) - (x + y) = 5 - 3 \implies x = 2$. Behelyettesítve $x = 2$ a második (egyszerűsített) egyenletbe: $2 + y = 3 \implies y = 1$. Egyetlen stacionárius pont van: $P_0(2, 1)$.

Második parciális deriváltak:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x + 2y - 10) = 4$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x + 2y - 10) = 2$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2y - 6) = 2$$

Hesse-mátrix a $P_0(2, 1)$ pontban:

$$\underline{\underline{H}}(2, 1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(2, 1) & f_{xy}(2, 1) \\ f_{yx}(2, 1) & f_{yy}(2, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A Hesse-mátrix determinánsa:

$$\det(\underline{\underline{H}}(2, 1)) = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 8 - 4 = 4.$$

Mivel $\det(\underline{\underline{H}}(2, 1)) = 4 > 0$ és $f_{xx}(2, 1) = 4 > 0$, a függvénynek lokális minimuma van a $(2, 1)$ pontban. A lokális minimum értéke:

$$\begin{aligned} f(2, 1) &= 2(2^2) + 2(2)(1) + (1^2) - 10(2) - 6(1) + 8 \\ &= 2(4) + 4 + 1 - 20 - 6 + 8 \\ &= 8 + 4 + 1 - 20 - 6 + 8 = -5. \end{aligned}$$

Tehát a lokális minimum: $f_{min}(2, 1) = -5$.

8. (7 pont) Legyen D az $A(0,0)$, $B(0,1)$ és $C(1,1)$ csúcsú háromszög. Határozza meg D -n az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény kettősintegrálját!

Megoldás:

A D tartományt leíró egyenlőtlenségek: $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$. Az AC egyenes egyenlete $y = x$, az AB egyenes $x = 0$, a BC egyenes $y = 1$. A tartomány normáltartományként írható fel: $0 \leq x \leq 1$ és $x \leq y \leq 1$. (Vagy alternatíván: $0 \leq y \leq 1$ és $0 \leq x \leq y$.) Az integrálást az első bejárási sorrenddel végezzük:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^1 \left(\int_x^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx.$$

Belső integrál y szerint:

$$\begin{aligned} \int_x^1 (x^2 + y^2) dy &= \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_x^1 \\ &= \left(x^2(1) + \frac{1^3}{3} \right) - \left(x^2(x) + \frac{x^3}{3} \right) \\ &= x^2 + \frac{1}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3} \\ &= x^2 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x^3. \end{aligned}$$

Külső integrál x szerint:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x^3 \right) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{x^4}{3} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1}{3}(1) - \frac{1^4}{3} \right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{1}{3}(0) - \frac{0^4}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 0 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Az integrál értéke $\frac{1}{3}$.

9. (6 pont) Határozza meg a $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ tartományon az $f(x,y,z) = \sqrt{z}$ függvény hármasintegrálját!

Megoldás:

A gömbkoordinátákra áttérve $x = r \sin u \cos v$, $y = r \sin u \sin v$ és $z = r \cos u$, ahol $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz &= \int_{r=0}^1 \left(\int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{v=0}^{\frac{\pi}{2}} r^{1/2} \cos^{1/2} u \cdot r^2 \sin u dv \right) du \right) dr = \\ \int_{r=0}^1 \left(\int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[r^{5/2} \cos^{1/2} u \sin u \cdot v \right]_0^{v=\frac{\pi}{2}} du \right) dr &= \int_{r=0}^1 \left(\int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} r^{5/2} \cos^{1/2} u \sin u du \right) dr = \\ \int_{r=0}^1 \left[-\frac{\pi}{2} r^{5/2} \frac{\cos^{3/2} u}{3/2} \right]_0^{u=\pi/2} dr &= \int_{r=0}^1 \frac{\pi}{3} r^{5/2} dr = \left[\frac{2\pi r^{7/2}}{21} \right]_0^{r=1} = \frac{2\pi}{21} \end{aligned}$$