1. Határozzuk meg a másodrendü görbe tengelyeit, ha egyenlete:

a) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;

b) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$;

c) $4x^2 + 6xy + 4y^2 - 3y + 1 = 0$;

d) $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 2y - 9 = 0$;

e) $8x^2 + 6xy + 8x + 24y + 39 = 0$;

f) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 2 = 0$.

2. Hozzuk kanonikus alakra a következő másodrendü görbék egyenleteit:

a) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;

b) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;

c) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$;

d) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;

e) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + \frac{1}{2} = 0$;

f) $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$;

g) $8x^2 + 24xy + y^2 - 56x + 18y - 55 = 0$;

h) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;

i) $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$;

j) $7x^2 + 24xy + 38x + 24y + 175 = 0$;

k) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$;

l) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y + 3 = 0$;

m) $x^2 - 14xy + 49y^2 + 25 = 0$.

3. Döntsük el, hogy a következő egyenletek milyen görbéknek az egyenletei:

a) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$;

b) $2x^2 + 4xy - y^2 - 12 = 0$;

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$;

d) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$;

e) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 7x + 7y - 4 = 0$;

f) $x^2 + 9y^2 + 10x + 12y + 29 = 0$;

g) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 42x + 56y + 76 = 0$;

h) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 6x - 18y + 9 = 0$;

i) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + 48 = 0$.

1. a) A megadott másodrendű görbe determinánsa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Az $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ Laplace-féle egyenletből $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$.

A $\lambda_1 = -2$ sajátértékhez tartozó $\underline{s}_1$ sajátvektor x_1, x_2 koordinátáira

$$[1-(-2)]\,x_1 + 3x_2 = 0,$$

$$3x_1 + [1-(-2)]\,x_2 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldásából $\underline{s}_1$ $(1, -1)$ adódik. A $\lambda_2 = 4$-hez tartozó saját vektor $\underline{s}_2\,(-1, 1)$. Az $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ vektorok által jellemzett $P_1\,[1, -1, 0]$, $P_2\,[1, 1, 0]$ ideális pontok polárisai a görbe tengelyei. A tengelyek egyenletei: $x-y-1 = 0$, $x+y+1 = 0$.

b) A megadott görbe determinánsa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Az $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ Laplace-féle egyenletből $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. A megfelelő sajátvektorok $\underline{s}_1\,(1, 1)$, $\underline{s}_2\,(1, -1)$. A nem zérus sajátértékhez tartozó sajátvektor irányában levő $P\,[1, -1, 0]$ pont $x-y-1 = 0$ polárisa a görbe tengelye.

Megjegyzés: A görbe parabola (lásd a másodrendű görbék osztályozását). Parabola esetében a tengely ugy is megkapható, hogy a görbe $P_1\,[1, 1, 0]$ ideális pontját meghatározó $\underline{s}_1\,(1, 1)$ vektorra merőleges $\underline{s}_2(1, -1)$ vektor irányában levő $P_2\,[1, -1, 0]$ ideális pont polárisát számoljuk.

c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$, $\underline{s}_1\,(1, -1)$, $\underline{s}_2\,(1, 1)$. A tengelyek egyenlete: $2x-2y+3 = 0$, $14x+14y-3 = 0$.

d) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, $\underline{s}_1\,(1, -2)$, $\underline{s}_2\,(2, 1)$. A tengely egyenlete: $10x+5y-7 = 0$.

e) $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\underline{s}_1\,(3, 1)$, $\underline{s}_2\,(1, -3)$. A tengelyek egyenlete: $9x+3y+8 = 0$, $x-3y+32 = 0$.

f) $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $\underline{s}_1\,(3, 1)$, $\underline{s}_2\,(1, -3)$. A tengelyek egyenlete: $3x+y+1 = 0$, $x-3y+3 = 0$.

2. a) A másodrendű görbe determinánsa

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix}.$$

Mivel $A_{33} = 40-4 = 36 \neq 0$, ezért a görbe centrális. A görbe centrumát az

$$5x + 2y - 16 = 0,$$

$$2x + 8y - 28 = 0$$

egyenletrendszer megoldásából kapjuk. A görbe centruma: $C\ (2,\ 3)$. Ha a koordináta-rendszert ugy toljuk el, hogy a kezdőpontja a görbe centruma, akkor az $x = x'+2$, $y = y'+3$ helyettesités után az

$$5x'^2 + 4x'y' + 8y'^2 - 36 = 0$$

egyenlethez jutunk.

Az $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$ Laplace-féle egyenletből $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.

Főtengelytranszformáció után a

$$4\xi^2 + 9\eta^2 - 36 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelyből rendezéssel adódik a görbe egyenletének

$$\frac{\xi^2}{9} + \frac{\eta^2}{4} = 1$$

kanonikus alakja.

b) A másodrendü görbe determinása

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix}.$$

Mivel $\mathcal{A}_{33} = -9 \neq 0$, ezért a görbe centrális. Ha a $C\ (-1,\ 2)$ centrum lesz eltolás utána a koordináta-rendszer kezdőpontja, akkor a görbe egyenlete

$$6x'y' + 8y'^2 - 9 = 0$$

alaku lesz.

A Laplace-féle egyenlet gyökei $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, tehát főtengelytranszformáció után a

$$9\xi^2 - \eta^2 - 9 = 0$$

egyenlethez jutunk, amelyből

$$\xi^2 - \frac{\eta^2}{9} = 1.$$

c) A másodrendü görbe determinánsa

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Mivel $\mathcal{A}_{33} = 1-1 = 0$. ezért a görbe parabolikus. Ebben az esetben először elforgatjuk a koordináta-rendszert ugy, hogy elforgatás után a tengelyek a görbe egyenletében szereplő másodfoku (kvadratikus) részhez tartozó mátrix sajátvektoraival legyenek párhuzamosak, majd eltoljuk a koordinátarendszert (ha szükséges) ugy, hogy az egyenletben ne szerepeljen a négyzetes tagban szereplő változó első fokon; végül ha a másik változó együtthatója nem zérus, akkor még egy eltolással elérhető, hogy az egyenletben konstans se szerepeljen.

Az $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ Laplace-féle egyenletből $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

A megfelelő sajátvektorok $\underline{s}_1\ (1,\ 1)$, $\underline{s}_2\ (-1,\ 1)$. Az

$$\begin{array}{c|cc} & x' & y' \\ \hline x & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

transzformációs táblázat alapján

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' ,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' .$$

Helyettesités után a görbe egyenlete

$$2y'^2 - 4\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' - 9 = 0$$

lesz. Teljes négyzetté kiegészités után a

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\sqrt{2}x' + 8 = 0$$

egyenlet adódik. $\eta = y' + \frac{\sqrt{2}}{2}$ helyettesitéssel és az x' változó együtt-hatójának kiemelésével a

$$2\eta^2 - 4\sqrt{2}\,(x' - \sqrt{2}) = 0$$

egyenletet kapjuk. $\xi = x' - \sqrt{2}$ helyettesités után

$$2\eta^2 - 4\sqrt{2}\,\xi = 0,$$

amelyből

$$\eta^2 = 2\sqrt{2}\,\xi .$$

d) $C\,(1, 1)$, $5x'^2+6x'y'+5y'^2-32 = 0$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$,

$\frac{\xi^2}{16} + \frac{\eta^2}{4} = 1.$

e) $C\,\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ $3x'^2-2x'y'+3y'^2 = 0$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$,

$\xi^2 + 2\eta^2 = 0.$

f) $C\,(1, 1)$, $x'^2-8x'y'+7y'^2+9 = 0$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 9$,

$\frac{\xi^2}{9} - \eta^2 = 1.$

g) $C\,(-1, 3)$; $8x'^2+24x'y'+y'^2 = 0$; $\lambda_1 = 17$, $\lambda_2 = -8$,

$17\xi^2 - 8\eta^2 = 0.$

h) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$, elforgatás után $25y'^2-50x' = 0$, $y'^2 = 2x'$.

i) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, elforgatás után $y'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 1 = 0$;
y'-tengelyirányu eltolás után $\eta^2 = \frac{9}{8}$.

j) $C\,(-1, -1)$, $7x'^2+24x'y'+144 = 0$; $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 16$,

$\frac{\xi^2}{16} - \frac{\eta^2}{9} = 1.$

k) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, elforgatás után $2y'^2 - 4\sqrt{2}x' + 4 = 0$; x' tengelyirányu eltolás után $\eta^2 = 2\sqrt{2}\,\xi$.

l) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, elforgatás után $5y'^2 + 4\sqrt{5}y' + 3 = 0$; y' tengelyirányu eltolás után $5\eta^2 = 1$, amelyből $\eta^2 = \frac{1}{5}$.

m) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 50$, elforgatás után $50y'^2 + 25 = 0$, amelyből $y'^2 = -\frac{1}{2}$.

3. a) $A = 0$, $A_{33} = 0$, (valós vagy képzetes) párhuzamos egyenespár vagy (kettős) egyenes; az $y = 0$ egyenes a görbét a $P\ (4,\ 0)$, $Q\ (2,\ 0)$ pontokban metszi, tehát a görbe (valós) párhuzamos egyenespár;

b) $A \neq 0$, $A_{33} < 0$, hiperbola;

c) $A \neq 0$, $A_{33} = 0$, parabola;

d) $A \neq 0$, $A_{33} > 0$, (valós vagy képzetes) ellipszis; a görbe centruma a $C\ (1, 1)$ pont, s e ponton áthaladó $y = x$ egyenes a görbét a $P\ (-1,\ -1)$, $Q\ (3, 3)$ pontokban metszi, tehát a görbe valós ellipszis;

e) $A = 0$, $A_{33} < 0$, metsző egyenespár;

f) $A = 0$, $A_{33} > 0$, képzetes metsző egyenespár;

g) $A = 0$, $A_{33} = 0$, (valós vagy képzetes) párhuzamos egyenespár vagy (kettős) egyenes; a görbe ideális pontját nem tartalmazó $y = 0$ egyenes és a görbe (valós) közös pontjainak a száma zérus, tehát a görbe képzetes párhuzamos egyenespár;

h) $A = 0$, $A_{33} = 0$, (valós vagy képzetes) párhuzamos egyenespár vagy (kettős) egyenes; a görbe ideális pontját nem tartalmazó $y = 0$ egyenes a görbét a $P\ (3,\ 0)$ pontban metszi, tehát a görbe (kettős) egyenes;

i) $A \neq 0$, $A_{33} > 0$, (valós vagy képzetes) ellipszis; a görbe centruma a $C\ (1, 1)$ pont, s e ponton áthaladó $y = 1$ egyenesnek és a görbének nincsenek (valós) közös pontjai, tehát a görbe képzetes ellipszis.