2. házi feladat

1.feladat. Legyen a kocka egységoldalú, és minden csúcsának koordinátája csupa 0 vagy 1.
Az első pók útvonala: $(0,0,0)^T$ csúcsból $(1,1,0)^T$ csúcsba.
A második pók útvonala: $(1,0,1)^T$ csúcsból $(0,1,1)^T$ csúcsba.
Legyen az idő, amennyi idő alatt egy pók végigmegy egy lapátlón egység.
A pókok helyzete $t \in [0,1]$ időpillanatban: $(t,t,0)^T$ és $(1-t,t,1)^T$

$$\text{Tehát a légy helyzete: } \frac{2}{3}(t,t,0)^T + \frac{1}{3}(1-t,t,1)^T = \left(\frac{1+t}{3}, t, \frac{1}{3}\right)^T$$

Ez egy egyenes egyenlete, tehát a légy egyenes pályán mozog.

Az pókok közötti szál egyenesének $k \in [0,1]$ z-koordinátájú pontja $t \in [0,1]$ időpillanatban:

$$\big((1-k)t + k(1-t), t, k\big)^T = (k + t - 2kt, t, k)^T$$

$$\text{Tehát a súrolt felület egyenlete: } x = y + z - 2yz$$

Ez egy hiperbolikus paraboloid egyenlete.

2.feladat. Először szerkesszük meg azt a Q pontot, melyre:

$$O_2^{-60^\circ} \circ O_1^{45^\circ} = Q^{-15^\circ}$$

Az O_1O_2Q háromszögből 2 pont adott, valamint ezen oldalon fekvő mindkét szöget ismerjük, így Q könnyen szerkeszthető:

$$O_2O_1Q\sphericalangle = 180^\circ - 22,5^\circ = 157,5^\circ$$
$$O_1O_2Q\sphericalangle = 15^\circ$$

A keresett transzformáció:

$$O_3^{30^\circ} \circ O_2^{-60^\circ} \circ O_1^{45^\circ} = O_3^{30^\circ} \circ Q^{-15^\circ} = P^{15^\circ}$$

Az O_3QP háromszögből 2 pont adott, valamint ezen oldalon fekvő mindkét szöget ismerjük, így P könnyen szerkeszthető:

$$O_3QP\sphericalangle = 7,5^\circ$$
$$O_1O_2Q\sphericalangle = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$$

A feladatban szereplő összes forgatás szöge szerkeszthető szög, tehát ezen háromszögek megszerkeszthetőek.

3.feladat. Adottak A pont, e egyenes, k kör.
Feladat olyan szabályos hatszöget szerkeszteni, melynek egyik csúcsa A, és további egy-egy csúcsa illeszkedik e-re és k-ra.

Tegyük fel, hogy $ABCDEF$ egy pozitív irányú körbejárása lesz a megoldásban kapott hatszögnek.

Válasszuk szét esetekre a problémát az alapján, hogy mely csúcsokat tartalmazza e és k. Ez összesen 20 esetet jelent, hiszen a maradék 5 csúcs közül kell kettőt választanom, és a sorrend számít.

Ezek után mind a húsz esetben könnyen ki lehet már szerkeszteni a hatszöget a következő módon:

Transzformáljuk e egyenest A csúcs körül olyan módon, mely transzformáció az e egyesen lévő pontunkat átviszi a k körön lévő pontunkba. A kapott egyenes, és k metszéspontja megadja a k körön lévő pontot, amiből már könnyedén megszerkeszthető a hatszög. *Hiszen tudjuk ez a csúcs milyen viszonyban áll az A csúccsal.*

Példák:

- $B \in e, F \in k$ esetben e egyenest csak el kell forgatni A csúcs körül $120°$ szöggel.
- $D \in e, B \in k$ esetben e egyenest $-60°$ szöggel kell elforgatni A körül, és a kapott egyenes távolságát A csúcstól felére csökkentjük.

Minden esetben 0,1 vagy 2 metszéspont lehetséges k körrel, mely 0,1 vagy 2 megoldást eredményez.
A feladat csak annyit kért, hogy szerkesszünk meg egy ilyen szabályos hatszöget. Ha nem tudjuk mely csúcsot tartalmazza e illetve k, akkor végigcsinálhatjuk mind a 20 eset szerkesztési lépéseit, és minden esetben, ha kapunk metszéspontot az egy jó megoldáshoz fog vezetni.

Megjegyzés: Ezek alapján a megoldások száma 0 és 40 közé fog esni attól függően, hogyan helyezkednek el A, e, k egymáshoz képest.

Például, ha A távolsága e egyenestől nagyobb, mint kétszer A távolsága k legtávolabbi pontjától, akkor nyilván nem lesz egyetlen megoldása sem a feladatnak.

Másik végletre példa, ha k kör középpontja A és sugara sokkal nagyobb, mint A és e távolsága, akkor mind a 20 esetben lesz 2-2 metszéspontunk, melyek ha nem esnek egybe akkor valóban 40 megoldás lesz.

4.feladat. Adottak az $e: x = 4 + t, y = 4 + t, z = 4 + t$ magasságegyenes és az $A(-3, 12, 4)^T$ pont. Látható, hogy A nincs rajta ezen az egyenesen. Tegyük fel, hogy a e egyenletű magasságegyenes a D csúcson megy át. Ha a az oldalak hossza, akkor a tetraéder magassága $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, a háromszögek magassága pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Felírhatjuk a ABC háromszög α síkját, mivel ismerjük a rajta lévő A pontot, és a normálvektorát, ami a magasságegyenes irányvektorával egyenlő, vagyis $v_e = (1,1,1)$. Így a sík egyenlete: $\alpha : x + y + z - 13 = 0$.

Az α sík és az e egyenes metszete az $O(\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{13}{3})^T$ pont. Az AO szakasz hossza az ABC háromszög A-ból induló magasságvonalának a kétharmada. $\overrightarrow{AO} = (\frac{22}{3}, -\frac{23}{3}, \frac{1}{3})$, $|AO| = \frac{13\sqrt{6}}{3}$. Így kiszámítható az a oldalhossz, $a = 13\sqrt{2}$.

A D pontot megkaphatjuk, ha az O pontból $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ irányba felmérünk $\frac{\sqrt{6}}{3}a$-t, vagyis: $D_{1,2} = O \pm \frac{26\sqrt{3}}{3}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$D_1(13,13,13)^T$ és $D_2(-\frac{13}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{13}{3})^T$

Ha az A ponthoz az $\overrightarrow{AO}$ normált irányban felmérünk $\frac{13\sqrt{6}}{2}$-t, akkor a CB szaksz felezőpontját kapjuk: $A + (\frac{11\sqrt{6}}{39}, -\frac{23\sqrt{6}}{78}, \frac{\sqrt{6}}{78})\frac{13\sqrt{6}}{2} = F_A(8, \frac{1}{2}, \frac{9}{2})^T$.

Az $\overrightarrow{AO} \times v_e = (-8, -7, 15)$ szorzat kiadja a $\overrightarrow{CB}$ irányt. F_A-ból ilyen irányban $\frac{13\sqrt{2}}{2}$-t felmérve megkapjuk a B és C pontokat, tehát $F_A \pm \frac{13\sqrt{2}}{2}(-\frac{4\sqrt{2}}{13}, -\frac{7\sqrt{2}}{26}, \frac{15\sqrt{2}}{26}) = B, C$. Vagyis $B(4,-3,12)^T$ és $C(12,-4,-3)^T$, vagy fordítva.

5.feladat. Mivel a két ötszög egybevágó, de ellentétes körüljárási irányú, így az egyik ötszög vagy a másik tengelyes, vagy csúsztatva tükrözésével kapható meg.

Az első esetben az A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4', és A_5A_5' szakaszok felezőpontjai pont a tükrözés tengelyére esnek, így biztosan egy egyenesen vannak.

A második esetben jelölje a csúsztatás utáni ötszög megfelelő csúcspontjait $\overline{A_i}$ $(i \in \{1,2,3,4,5\})$. A csúsztatott ötszöget egy t tengelyre tükrözve kapjuk az A_i' $(i \in \{1,2,3,4,5\})$ ötszöget. Ekkor az $A_i\overline{A_i}$ szakaszok felezőpontjai, és így az A_iA_i' szakaszok felezőpontjai is rajta vannak t-n.