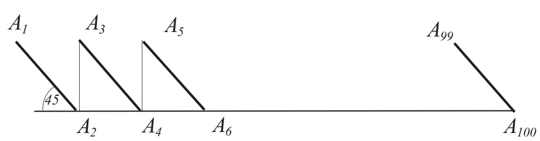
Geometria 3. házi feladat matematikus hallgatók részére

2016-2017 I. félév

1. Az $ABCD$ tetraéder egy magasságvonalának nevezzük a D csúcsból az ABC síkra állított merőlege szakaszt. Hasonlóan a többi csúcsra is bevezethetők. Mutassuk meg, hogy az így bevezethető m_A, m_B, m_C, m_D magasságvonalak akkor és csak akkor metszik egymást egy M magasságpontban, ha a tetraéder szemközti: AB, CD; AC, BD; AD, BC élei páronként merőlegesek egymásra.

2. Legyen O a tetraéder körülírt körének középpontja. Tegyük fel, hogy a tetraédernek létezik magasságpontja (lásd előző feladat). Fejezzük ki az $\overrightarrow{OM}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ vektorok segtségével. Hogyan lehetne általánosítani az Euler egyenes tételét 3-dimenzióra? Bizonyítsuk is be az analóg tételt.

3. Tekintsünk egy síkban az $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{100}$ pontokat, ahol A_iA_{i+1} $(i = 1, 3, 5...99)$ szakaszok hossza 1 (lásd ábra). Jelöljük az A_j $(j = 1..100)$ körüli $90°$ forgatást $\mathbf{F}_{A_i}$-vel.



   a.) Milyen transzformáció a $\mathbf{T} = \mathbf{F}_{A_{100}}\mathbf{F}_{A_{99}} \ldots \mathbf{F}_{A_1}$?

   b.) Mekkora a $P\mathbf{T}(P)$ szakasz ha P az ábra síkjának tetszőleges pontja?

   c.) Milyen egybevágósági transzformáció a $\mathbf{F}_{A_{99}}\mathbf{F}_{A_{98}} \ldots \mathbf{F}_{A_1}$?

4. Legyen adott egy egységkocka, amelynek egyik testátlója a z tengelyre illeszkedik, centruma az origó és egyik további csúcsa az $[x, z]$ síkban fekszik. Írjuk fel az adott kockát önmagára képező minden egybevágóságának mátrixát.

5. Bizonyítsuk be Ceva és Menelaos tételét.

Minden feladat 1 pontos, a nem teljes megoldások lényeges lépéseire részpontszámok kaphatók.

Beadási határidő: 2016. október 25. (legkésőbb az előadáson).

Jó munkát kívánunk!