3. házi feladat

1.feladat. Jelölje az m_A, m_B, m_C, m_D magasságegyenesek metszéspontját a szemközti lappal M_A, M_B, M_C, M_D, továbbá jelölje α_{XYZ} az X, Y, Z pontok által meghatározott síkot.

I: Az $ABCD$ tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra.

II: Az $ABCD$ tetraédernek létezik magasságpontja: M

Bizonyítás (I $\Rightarrow$ II) irány:

$$\mathrm{I} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\alpha_{BCD} \perp \overrightarrow{AM_A} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AM_A}$$

$$\text{Tehát: } \overrightarrow{CD} \perp \alpha_{ABM_A}$$

Analóg módon belátható, hogy $\overrightarrow{CD} \perp \alpha_{ABM_B}$.
Ebből az következik, hogy $\alpha_{ABM_A} = \alpha_{ABM_B}$, tehát A, B, M_A, M_B pontok egy síkban vannak, emiatt m_A és m_B magasságegyenesek metszik egymást.
Ugyanezen gondolatmenet alapján mind a 4 magasságegyenes páronként metszi egymást, amiből következik, hogy mind átmennek egy M magasságponton.

Bizonyítás (II $\Rightarrow$ I) irány:

$$(\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AM} \text{ és } \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BM}) \Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \alpha_{ABM} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$$

Hasonlóan belátható bármelyik szemközti élpár esetén a merőlegesség.

2.feladat.

$$\overrightarrow{OM'} := \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

Ekkor:

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} = \frac{\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} := \mathbf{v}$$

Itt használtuk ki, hogy O a beírt kör középpontja, ami miatt $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$.
Most használjuk fel, hogy a szemközti oldalak merőlegesek:

$$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} := \mathbf{w}$$

Mivel $\overrightarrow{BC} \perp \mathbf{v}$ és $\overrightarrow{BC} \perp \mathbf{w}$, ezért $\overrightarrow{BC} \perp \frac{\mathbf{v}+\mathbf{w}}{2} = \overrightarrow{AM'}$
Analóg módon látható, hogy $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AM'}$ tehát $\alpha_{BCD} \perp \overrightarrow{AM'}$, ami éppen azt jelenti, hogy $M' \in m_A$.
Ugyanígy igazolható, hogy $M' \in m_B, m_C, m_D$, tehát $M' = M$

Euler egyenes tétele 3-dimenzióra. *Egy magasságpontos tetraéder M magasságpontja, S súlypontja és a köré írt kör O középpontja egy egyenesen van. Az S pont az MO szakasz felezőpontja.*

Bizonyítás:

$$\overrightarrow{OS'} := \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$$

Jelölje s_A az A csúcsból induló súlyvonalát a tetraédernek. (tehát az A csúcs és a BCD háromszög súlypontja által meghatározott egyenest)
BCD súlypontját jelölje S_A. Helyvektora: $\overrightarrow{OS_A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$
Tehát s_A súlyvonal pontjanak helyvektorai:

$$k \cdot \overrightarrow{OA} + (1-k) \cdot \overrightarrow{OS_A} \text{ , ahol } k \in [0,1]$$

$k = \frac{1}{4}$ bizonyítja, hogy $S' \in s_A$
Ugyanígy igazolható, hogy $S' \in s_B, s_C, s_D$, tehát $S' = S$ a tetraéder súlypontja.

Az a tény, hogy $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OS}$ bizonyítja a tétel állítását.

3.feladat.

a.) 100 db 90°-os forgatás kompozíciója, tehát eltolás.

b.) $\mathbf{T}_2 := \mathbf{F}_{A_4}\mathbf{F}_{A_3}\mathbf{F}_{A_2}\mathbf{F}_{A_1}$, ez nyilván eltolás, melynek vektorát egy tetszőleges ponton vizsgálva megkapjuk, hogy $2\overrightarrow{A_1A_3}$.
$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2^{25}$, tehát $\mathbf{T}$ eltolás vektora $P\mathbf{T}(P) = 50\overrightarrow{A_1A_3} = 25\sqrt{2}$

c.) Mivel ez 99 darab 90°-os forgatás kompozíciója, ezért ez egy 270°-os forgatás. ($99 \equiv 3 \mod 4$)

4.feladat. Határozzuk meg a kocka csúcsait:
A z tengelyen lévő csúcsok: $A = (0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})^T$, $G = (0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})^T$.
Két olyan kocka van mely kielégíti a feladat feltételeit, itt most az egyiket számolom ki, a másik ennek a tükörképe $[x, y]$ síkra.

Tegyük fel, hogy $B \in [x, z]$, és $B_x > 0$.
Használjuk fel, hogy $|AB| = 1$ és $|AG| = \sqrt{2}$.
Ezekből $B = (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{3}})^T$ adódik.
Ezt a B pontot forgassuk el z tengely körül 120°-al kétszer, és megkapunk két további csúcsot:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_{(0,0,1)^T, 120^\circ} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E = \mathbf{T}(B) = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})^T$
$D = \mathbf{T}(E) = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})^T$ Az hiányzó 3 csúcsot megkaphatjuk, ha tükrözzük B, E, D csúcsokat az origóra:

$H = (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{3}})^T$
$C = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})^T$
$F = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})^T$

Egy kockát önmagára képező egybevágósága esetén minden csúcs egy képének koordinátája eredetileg is egy csúcs koordinátája volt. Ezen egyszerű észrevétel segítségével könnyen leszámolhatjuk hány különböző ilyen transzformáció létezik:
A csúcs képe 8-féle lehet (bármelyik csúcs).
B csúcs képe szomszédos kell legyen A csúcs képével, tehát 3 lehetőség van.
C csúcs képe szomszédos kell legyen B csúcs képével, és nem lehet azonos A képével, ami 2 lehetőség.
Ezen 3 csúcs képe már egyértelműen meghatározza az egybevágóságunkat, ami azt jelenti, hogy pontosan 48 ilyen mátrix létezik.

Példa:
Legyen: $\mathbf{T}_2$ az a leképezés, mely megcseréli A, B csúcsokat, és C csúcs átviszi D-be. Könnyű átgondolni, hogy ez éppen arra a síkra való tükrözés, melynek normálvektora: $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} = (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}})^T$ Tehát ennek a transzformációnak a mátrixa:

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{M}_\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Megjegyzés:
Egybevágósági transzformációk mátrixai szortásra nézve zártak:
$\mathbf{T}, \mathbf{T}_2$ jó mátrixok, így $\mathbf{T}^2, (\mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}), (\mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}^2)$ is jó mátrixok. Könnyű átgondolni, hogy ezek mind különbözőek is.
($\mathbf{T}^3$ mátrix is triviálisan jó, hiszen identitás mátrix.)

5.feladat.

Menelaosz-tétel. *Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, melyet e egyenes két pontban metsz: $M \in \overline{AC}, E \in \overline{BC}$ pontokban. Továbbá N legyen az e egyenes metszéspontja az AB oldal meghosszabbításával. Ekkor:*

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{NA}} = -1$$

Bizonyítás:
Jelölje B csúcs merőleges vetületét e egyenesre F.
Ekkor AMN és BFN háromszögek hasonlóak, valamint CEM és BEF háromszögek hasonlóak. Tehát:

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BF}} = \frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{NB}} \text{ és } \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{BF}}$$

Ezeket összeszorozva:
$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BF}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{NB}} \cdot \frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{BF}}$$
Innen egyszerű átrendezéssel adódik a tétel állítása, ha felhasználjuk, hogy $\overrightarrow{NB} = -\overrightarrow{BN}$.

Ceva-tétel. *Legyen ABC tetszőleges háromszög, oldalain egy-egy pont $E \in b$, $F \in c$, $D \in a$. Ekkor AD, BE, CF egyenesek pontosak akkor metszik egymást egy O pontban, ha*
$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = 1$$

Bizonyítás:
Menelaosz-tétel ABE háromszögre:
$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BO}}{\overrightarrow{OE}} \cdot \frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{CA}} = -1$$
Menelaosz-tétel BCE háromszögre:
$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AE}} \cdot \frac{\overrightarrow{EO}}{\overrightarrow{OB}} = -1$$
A két egyenletet összeszorozva éppen a tétel állítását kapjuk az egyszerűsítések után.