# 4. házi feladat

**1.feladat.** Egy négyzetet önmagára képező egybevágósága esetén $A$ képe 4 féle lehet, $B$ képe szomszédos kell legyen $A$ képével, amire 2 lehetőség van. Ezen két csúcs képe már egyértelműen meghatározza az egybevágóságot.
Tehát 8 különböző önmagára képező egybevágósága van a négyzetünknek:

- Identitás:
  Mátrixa: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  $y = x^2$ parabola képe: $y' = (x')^2$
- Origó körüli 90° forgatás:
  Mátrixa: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  $y = x^2$ parabola képe: $x' = -(y')^2$
- Origó körüli 180° forgatás:
  Mátrixa: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
  $y = x^2$ parabola képe: $y' = -(x')^2$
- Origó körüli 270° forgatás:
  Mátrixa: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
  $y = x^2$ parabola képe: $x' = (y')^2$
- $y$ tengelyre való tükrözés:
  Mátrixa: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  $y = x^2$ parabola képe: $y' = (x')^2$
- $x$ tengelyre való tükrözés:
  Mátrixa: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
  $y = x^2$ parabola képe: $y' = -(x')^2$
- $y = x$ egyenesre való tükrözés:
  Mátrixa: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  $y = x^2$ parabola képe: $x' = (y')^2$
- $y = -x$ egyenesre való tükrözés:
  Mátrixa: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
  $y = x^2$ parabola képe: $x' = -(y')^2$

**2.feladat.** $A = (1, 0, 0)^T$, $e$ egyenes pontjai: $(1 + 4t, -2 + 2t, 2 + 3t)^T$.
Jelölje ezek síkját $\alpha$, és $B := (1, -2, 2)^T \in e$.
$\alpha$ normálvektora $\mathbf{n}_\alpha$ merőleges $e$ irányvektorára: $\mathbf{v} = (4, 2, 3)^T$, és $\overrightarrow{AB} = (0, -2, 2)^T$ vektorra is.
Tehát: $\mathbf{n}_\alpha \parallel (\mathbf{v} \times \overrightarrow{AB}) = (10, -8 - 8)^T$, amiből $\alpha : 5x - 4y - 4z = 5$ adódik.

$\mathbf{n}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{57}}(5, -4, -4)^T$
A tükrözés mátrixa:

$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{57}\begin{bmatrix} 7 & 40 & 40 \\ 40 & 25 & -32 \\ 40 & -32 & 25 \end{bmatrix}$$

Az eltolási rész pedig: $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_n)A = \frac{1}{57}(50, -40, -40)^T$.
Tehát a transzformáció 4x4-es mátrixa:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{57}\begin{bmatrix} 7 & 40 & 40 & 50 \\ 40 & 25 & -32 & -40 \\ 40 & -32 & 25 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 57 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}(7, 3, 10, 1)^T = \frac{1}{57}(619, -5, 394, 57)^T$
Tehát $P = (7, 3, 10)^T$ tükörképe: $P' = \frac{1}{57}(619, -5, 394)^T$

**3.feladat.** $x - 2 = y - 3 = z + 1$ körüli $120°$-os forgatás:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = 0$, $y = -3z$ egyenesre tükrözés ($180°$-os forgatás):

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transzformáció mátrixa tehát:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{16}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egy pont, és képe közötti kapcsolat: $\mathbf{T}(x, y, z, 1)^T = (x', y', z', 1)^T$ tehát $(x, y, z, 1)^T = \mathbf{T}^{-1}(x', y', z', 1)^T$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből a következők adódnak:
$x = \frac{4}{5}y' - \frac{3}{5}z' - 1$
$y = -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}z' + 4$
$z = -x' - 3$
Visszahelyettesítve megkapjuk az ellipszoid egyenletét a transzformáció után:
$4(\frac{4}{5}y' - \frac{3}{5}z' - 1)^2 + 2(-\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}z' + 4)^2 + (-x' - 3)^2 = 4$

**4.feladat.**

**Euler egyenlőtlenség.** *Legyen $ABC$ tetszőleges háromszög, $R$ a körülírt kör sugara, $r$ a beírt kör sugara. Ekkor $R \geq 2r$.*

Bizonyítás:
Jelölje $O$ a körülírt kör középpontját, $m_a, m_b, m_c$ a magasságvonalak hosszát, $d_a, d_b, d_c$ pedig $O$ távolságát $a, b, c$ oldalaktól, $T$ az $ABC$ háromszög területét.

$$R + d_a \geq m_a$$

$$aR + ad_a \geq am_a = 2T$$

Hasonló egyenlőtlenség igaz mindhárom oldalra. Ezeket összeadva:

$$(a + b + c)R + ad_a + bd_b + cd_c \geq 6T$$

Használjuk fel, hogy:

$$T = T_{BCO} + T_{CAO} + T_{ABO} = \frac{ad_a + bd_b + cd_c}{2}$$

Tehát:

$$(a + b + c)R \geq 4T = 4\left(r\frac{a + b + c}{2}\right)$$

Innen egy osztással adódik a tétel állítása.

**Euler egyenlőtlenség 3-dim.** *Legyen $ABCD$ tetszőleges tetraéder, $R$ a körülírt gömb sugara, $r$ a beírt gömb sugara. Ekkor $R \geq 3r$.*

Bizonyítás:
*A 2-dimenziós eset bizonyításával teljesen analóg módon:*
Jelölje $O$ a körülírt gömb középpontját, $m_a, m_b, m_c, m_d$ a magasságvonalak hosszát, $d_a, d_b, d_c, d_d$ pedig $O$ távolságát $A, B, C, D$ csúcsokkal szemközti laptól, $V$ az $ABCD$ tetraéder térfogatát.

$$R + d_a \geq m_a$$

$$T_{BCD}R + T_{BCD}d_a \geq m_a T_{BCD} = 3V$$

Hasonló egyenlőtlenség igaz mind a négy lapra. Ezeket összeadva:

$$(T_{BCD}+T_{ACD}+T_{ABD}+T_{ABC})R+T_{BCD}d_a+T_{ACD}d_b+T_{ABD}d_c+T_{ABC}d_d \geq 12V$$

Használjuk fel, hogy: $T_{BCD}d_a + T_{ACD}d_b + T_{ABD}d_c + T_{ABC}d_d = 3V$
Mivel $O$ pont által 4 tetraéderre osztva $ABCD$ tetraédert ezek éppen az egyes részek térfogatainak 3-szorosai. Tehát:

$$(T_{BCD} + T_{ACD} + T_{ABD} + T_{ABC})R \geq 9V$$

Ha a beírt kör középpontja szerint osztjuk 4 tetraéderre $ABCD$-t, akkor a következőt kapjuk:

$$V = \frac{r}{3}(T_{BCD} + T_{ACD} + T_{ABD} + T_{ABC})$$

Ezek után egy osztással adódik a tétel állítása: $R \geq 3r$

**5.feladat.** Az oktaéder csúcsai:
$(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)^T, (0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T, (0,0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2})^T$
Tehát a tetraéder csúcsai legyenek:
$A=(0,0,0)^T$ az origó
$B=(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6})^T$ az egyik lap középpontja.
$C=(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}0)^T$ ezen lap egyik élének felezéspontja.
$D=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)^T$ ezen él egyik végpontja.

- $ABC$ oldalra való tükrözés:
  $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-\frac{1}{12},\frac{1}{12},0)^T$, tehát a sík normálvektora:
  $\mathbf{n}_1=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T$
  Tehát a tükrözés mátrixa: $\mathbf{M}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
- $ABD$ oldalra való tükrözés:
  $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}=(0,-\frac{1}{6},\frac{1}{6})^T$, tehát a sík normálvektora:
  $\mathbf{n}_2=(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$
  Tehát a tükrözés mátrixa: $\mathbf{M}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$
- $ACD$ oldalra való tükrözés:
  $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}=(0,0,\frac{1}{4})^T$, tehát a sík normálvektora:
  $\mathbf{n}_3=(0,0,1)^T$
  Tehát a tükrözés mátrixa: $\mathbf{M}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
- $BCD$ oldalra való tükrözés:
  $\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC}=(-\frac{1}{12},-\frac{1}{12},-\frac{1}{12})^T$, tehát a sík normálvektora:
  $\mathbf{n}_1=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T$
  Tehát a tükrözés mátrixa: $\mathbf{M}_4=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{bmatrix}$
  Az eltolási rész: $(\mathbf{I}-\mathbf{M}_4)B=(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})^T$
  Tehát a transzformáció 4x4-es mátrixa:
  $$\mathbf{T}_4=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&-2&\sqrt{2}\\-2&1&-2&\sqrt{2}\\-2&-2&1&\sqrt{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Legyen $\mathbf{T}$ egy olyan transzformáció, mely ezen 4 síktükrözés kompozíciója valamilyen sorrendben.
Az $ABCD$ tetraéder három lapjának síkja szimmetriasík az eredeti oktaéderben, a negyedik lap síkja pedig az oktaéderben is egy lapsík.
Tehát az oktaéder képe egy ilyen $\mathbf{T}$ transzformációnál egy olyan oktaéder, melynek 1 közös lapja az eredeti oktaéderrel. *(3 közös csúcs)*