5. házi feladat

1.feladat. $x+1=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ egyenest jelölje e.
$\mathbf{v}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3}.\frac{2}{3})^T$ az irányvektora.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v},180}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-7&4&4\\4&-1&8\\4&8&-1\end{bmatrix}$$

Az eltolási rész pedig: $(\mathbf{I}-\mathbf{R}_{\mathbf{v},180})(-1,2,-9)^T=\frac{1}{9}(-12,48,-42)^T$
Tehát az e egyenesre való tükrözés mátrixa:

$$\mathbf{T}_e=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-7&4&4&-12\\4&-1&8&48\\4&8&-1&-42\\0&0&0&9\end{bmatrix}$$

Az y tengelyre való tökrözés 4x4-es mátrixa:

$$\mathbf{T}_y=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Tehát a kompozíció 4x4es mátrixa a sorrendtől függően:

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_e\mathbf{T}_y=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}7&4&-4&-12\\-4&-1&-8&48\\-4&8&1&-42\\0&0&0&9\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_y\mathbf{T}_e=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}7&-4&-4&12\\4&-1&8&48\\-4&-8&1&42\\0&0&0&9\end{bmatrix}$$

Állítás:
Jelölje d két tükrözés tengelyeinek távolságát. A kompozíció eltolási vektorának nagysága legalább $2d$, de felső korlátot nem lehet rá adni d függvényében.
A bizonyításhoz használjuk fel, hogy az eltolási vektor nagysága éppen az origó, és az origó képének távolsága.

Bizonyítás (alsó korlát):
Legyen α egy olyan sík, mely nem merőleges egyik tükrözés tengelyére sem, és tartalmazza a két tükrözés egyeneseinek normáltranszverzálisát.

Erre a síkra való merőleges vetületet vizsgálva a transzformáció két párhuzamos egyenesre való tükrözés kompozíciója, melyek távolsága d. Tehát eltolás $2d$-vel. Ez azt jelenti, hogy az eltolási vektor merőleges vetülete α síkra $2d$ nagyságú. Egy vektor merőleges vetülete nem lehet hosszabb az eredeti vektornál, ezért az eltolási vektor nagysága legalább $2d$.
Az alsó korlát éles. Erre példa ha a két egyenes és az origó egy síkban vannak.

Bizonyítás (felső korlátra konstrukció):
Rögzítsünk két pozitív paramétert: k, d. Tükrözzünk először az x tengelyre, majd az $(x = k, y = d)$ egyenesre. (z tengely eltolva $(k, d, 0)^T$ vektorral)
Ekkor a két egyenes távolsága d.
Az origó képe pedig: $(2k, 2d, 0)^T$.
Tehát az eltolási vektor nagysága $2\sqrt{k^2 + d^2}$
Ez bizonyítja az állítást, hiszen rögzített d esetén az eltolási vektor tetszőlegesen nagy lehet k választásától függően.

2.feladat.

(a) Oldalakat ismerjük: $a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{3}, c = \frac{2\pi}{3}$
Szögek koszinusztétellel számolhatóak:
$\gamma = 125°15'52" = 2,186276$
$\beta = 54°44'8" = 0,9553166$
$\alpha = 70°31'44" = 1,230959$

Jelölje O a beírt kör középpontját, és jelölje P a beírt kör érintési pontját AB oldallal.
BCO háromszögre szögekre vonatkozó koszinusz-tétel:
$\cos(COB\sphericalangle) = -\cos(\frac{\gamma}{2})\cos(\frac{\beta}{2}) + \sin(\frac{\gamma}{2})\sin(\frac{\beta}{2})\cos(a) = -0,408248$
$COB\sphericalangle = 114°5'41" = 1,99133$

$$\sin|OB| = \sin(a)\frac{\sin(\frac{\gamma}{2})}{\sin(COB\sphericalangle)} = 0,972835$$

$|OB| = 76°36'53" = 1,33718$
Ezek után $r = |OP|$ meghatározható OPB derékszögű háromszögből:
$\sin|OP| = \sin(OB)\sin(\frac{\beta}{2}) = 0,447213$
Tehát a beírt kör sugara: $r = 26°33'54" = 0,463647$

A körülírt kör sugarának meghatározása:
Jelölje D az AB oldalív felezőpontját.
BCD gömbi háromszög alapján:
$\cos|CD| = \cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\beta) = 0,5$
Innen $|CD| = 60° = \frac{\pi}{3}$ adódik.
Mivel $|CD| = |AD| = |BD|$, ezért D a körülírt kör középpontja.
A körülírt kör sugara: $R = 60° = \frac{\pi}{3}$

(b) Nem. Ellenpélda:
Legyen $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, ekkor nyilván $a = b = c$, tehát $a^2 + b^2 \neq c^2$

Gömbi Pithagorasz-tétel:
Ha $\gamma = \frac{\pi}{2}$ akkor koszinusztétel alapján: $\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$

3.feladat.

(a) $a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{3}, c = \frac{\pi}{6}$
$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\beta)$

Innen: $\beta = 108°31'56"$ adódik.

BA_1A derékszögű háromszögre szinusz tétel:
$\sin|AA_1| = \sin(c)\sin(\beta)$
Innen $|AA_1| = 28°17'56" = 0,49391$ adódik.
$\cos(c) = \cos|AA_1|\cos|BA_1|$
Innen $|BA_1| = 10°23'55" = 0,18149$

(b) Ha egy gömbi háromszög egyik oldalán fekvő mindkét szöge derékszög, akkor nincs egyértelmű magasságegyenese ennek az oldalnak. (végtelen sok magasságegyenese van)

Tétel. Ha Egy gömbi háromszögnek legfeljebb egy derékszöge van, akkor minden magasságegyenes egyértelmű, és ezek egy átellenes pontpárban metszik egymást.

Bizonyítás:
Jelölje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a gömb középpontjából a csúcsokba mutató vektorokat.
Az AB oldal íve merőleges $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorra.
A CC_1 magasságegyenes tehát merőleges $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ vektorra.
Hasonlóan: AA_1 magasságegyenes merőleges $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ vektorral.
Tehát AA_1 és CC_1 metszéspontjába mutató vektor párhuzamos
$\mathbf{v} := (\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))$ vektorral.

Használjuk fel, hogy: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) - (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}))$
Ezt alkalmazva: $\mathbf{v} = -(\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) \times (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}))$
Mivel ez párhuzamos két másik magasságegyenes metszéspontjába mutató vektorral, ezért ezzel beláttuk, hogy létezik magasságpont.
Ha több, mint 2 derékszög lenne, akkor $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ *fordulna elő.*

(c) ABF_A háromszögből ismert 2 oldal, és közrezárt szög:
$\cos|AF_A| = \cos(c)\cos(\frac{a}{2}) + \sin(c)\sin(\frac{a}{2})\cos(\beta) = 0,73934$
Tehát $|AF_A| = 42°19'45"$
Innen könnyen számolható: $BAF_A\sphericalangle = 32°36'14" = BAS\sphericalangle$

Hasonlóan BF_BA háromszöget vizsgálva:
$\alpha = 50°43'43"$
$|BF_B| = 24°44'8"$
$ABF_B\sphericalangle = 67°40'45" = ABS\sphericalangle$

Már ismerjük ABS háromszög egyik oldalát, és a rajta fekvő két szöget, így minden paramétere számolható:
$BSA\sphericalangle = 83°35'6"$
$|AS| = 27°44'22"$

(d) Igen, egy gömbi háromszögnek létezik súlypontja.

Bizonyítás (b) feladathoz hasonlóan:
AF_A súlyvonal merőleges $((\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a})$ vektorra.

BF_B súlyvonal merőleges $((\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b})$ vektorra.
CF_C súlyvonal merőleges $((\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c})$ vektorra.

Tehát AF_A és BF_B metszéspontjába mutató vektor párhuzamos:
$((\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a})\times((\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b})$ vektorral.

Ezt hozzuk szebb formára:
$((\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a})\times((\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) +$
$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) =$
$= \mathbf{0} - (\mathbf{bac})\mathbf{b} + (\mathbf{cab})\mathbf{a} + (\mathbf{cab})\mathbf{c} = (\mathbf{abc})(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$

Látható, hogy ugyanezt a vektort kapnánk másik 2 súlyvonal metszéspontját vizsgálva, tehát mindhárom súlyvonal egy pontban metszi egymást.

4.feladat. Tegyük fel, hogy a gömb 1 sugarú.
A gömbi n-szög területe: $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n - (n-2)\pi$, esetünkben ez $4\alpha - 2\pi = 1$, amiből $\alpha = \frac{1+2\pi}{4} = 1.820796 = 104°19'26"$ a négyszög szöge.

Egy csúcs köré írt kör területének $\frac{\alpha}{2\pi}$-ad része esik a négyszögbe, így a keresett terület $T = 1 - 4T_{kor}\frac{\alpha}{2\pi}$ lesz.

A körök területének kiszámításához ismernünk kell a sugarukat, ami a négyszög oldalának fele. A négyszög oldalát a szögekre vonatkozó koszinusztételből kaphatjuk meg. Nézzük a négyszög két oldala, és egy átlója által meghatározott háromszöget. Ekkor

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos(\alpha) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin(\alpha)\cos(a)$$

, így $a = 52°53'28"$ a négyszög oldala. A körök sugara ennek a fele, tehát $r = 26°26'44"$.A kör területe $T_{kor} = 2\pi(1-\cos(r)) = 0.65749$.

Ebből a keresett terület $T = 0.23787$.

5.feladat. Ptolemaiosz-tétel: Egy húrnégyszög átlóinak szorzata megegyezik a húrnégyszög szemközti oldalainak szorzatának összegével.
Bizonyítás: Vegyünk fel az AC átlón egy E pontot, melyre teljesül, hogy $ABD\sphericalangle = CBE\sphericalangle$.

Mivel az $ADB\sphericalangle$ és az $ACB\sphericalangle$ az AB ívhez tartozó kerületi szögek, így $ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, így az ADB és BEC háromszögek hasonlók.Oldalaik aránya megegyezik, tehát $AD : BD = EC : BC$, ebből $EC = (BC \cdot AD) : BD$ következik.

$BAC\sphericalangle = BDC\sphericalangle$, mivel ezek a BC ívhez tartozó kerületi szögek. Tehát az ABE és BCD háromszögek hasonlók. Ekkor az oldalak aránya megegyezik, tehát $AE : AB = CD : BD$, amiből $AE = (CD \cdot AB) : BD$.

A két kapott egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
AE + EC &= (CD \cdot AB) : BD + (BC \cdot AD) : BD \\
AC &= \frac{CD \cdot AB + BC \cdot AD}{BD} \\
AC \cdot BD &= CD \cdot AB + BC \cdot AD
\end{aligned}
$$

, amivel bizonyítottuk a tételt.