6. házi feladat

1.feladat. Oktaéder esetén:
A lapokat alkotó háromszögek szögei $\frac{\pi}{2}$, hiszen minden csúcsban 4 lap találkozik.
Tehát ezen háromszögek területe $\frac{\pi}{2}$.
Legyen ABC egy lapja az oktaédernek, és O ezen lap középpontja, F pedig az AB oldalív felezőpontja.
Ekkor AOF háromszög minden szögét ismerjük, így az oldalak könnyen számíthatók. $AO = R$ a körülírt kör sugara, $OF = r$ a beírt kör sugara.
$\cos(\frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{3})\cos(r)$
Innen $\cos(r) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ tehát $r = 0,61548 = 35°15'52"$.
$\cos(\frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4})\cos(R)$
Innen $\cos(R) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ tehát $R = 0,95532 = 54°44'8"$.

Dodekaéder esetén:
A lapokat alkotó ötszögek szögei $\frac{2\pi}{3}$, hiszen minden csúcsban 3 lap találkozik.
Tehát ezen ötszöget területe $\frac{\pi}{3}$.
Legyen $ABCDE$ egy lapja az oktaédernek, és O ezen lap középpontja, F pedig az AB oldalív felezőpontja.
Ekkor AOF háromszög minden szögét ismerjük, így az oldalak könnyen számíthatók. $AO = R$ a körülírt kör sugara, $OF = r$ a beírt kör sugara.
$\cos(\frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{5}) + \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{5})\cos(r)$
Innen $\cos(r) = 0,85065$ tehát $r = 0,55357 = 31°43'3"$.
$\cos(\frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{5}) + \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{5})\cos(R)$
Innen $\cos(R) = 0,79465$ tehát $R = 0,65236 = 37°22'39"$.

2.feladat. A válasz a Lexell-kör:
Ez egy olyan gömbi kör, mely tartalmazza az A és B csúcsok átellenes pontjait.

Bizonyítás:
Legyen AC felezőpontja E, és BC felezőpontja F.
Legyen továbbá A, B, C merőleges vetületei EF egyenesre rendre: G, H, I.
Ekkor AGE háromszög egybevágó CIE háromszöggel, valamint BHF háromszög egybevágó CIF háromszöggel.
Ez azt jelenti, hogy ABC háromszög területe megegyezik $AGHB$ négyszög területével. (átdarabolható)
Ezek alapján minden olyan C' pont, mely CI távolságra van EF egyenestől szintén jó lesz. Hiszen ekkor ABC' ugyanebbe az $AGHB$ négyszögbe darabolható át.

Így a keresett pontok halmaza az EF egyenestől CI távolságra lévő pontok között van, melyek egy gömbi kört alkotnak. Ezt a kört nevezik Lexell-körnek.

Jelölje A' és B' az A és B csúcsok átellenes pontjait. Könnyen látható, hogy a Lexell-kör tartalmazza A' és B' pontokat.

Ha nem elfajult háromszögeket keresünk csak, akkor ezen körnek az $A'B'$ nyílt C-t tartalmazó íve lesz a keresett pontok halmaza. (ennek az ívnek a tükrözése az AB egyenesre nyilván szintén jó megoldást ad)

3.feladat. Adatok: $R = 6367$ km
Budapest: K.h. 19°, É.sz. 47°30′
Tokió: K.h. 139°41′, É.sz. 35°41′

Jelölje Budapestet B, Tokiót T, az északi sarkot pedig E. Ekkor a keresett távolság éppen BT ív, melyet EBT háromszögből egyetlen koszinusztétellel meg lehet kapni:
$EB = 90° - 47°30' = 42°30'$
$ET = 90° - 35°41' = 54°19'$
$BET\sphericalangle = 139°41' - 19° = 120°41'$
$\cos(BT) = \cos(EB)\cos(ET) + \sin(EB)\sin(ET)\cos(BET\sphericalangle) = 0,15003$
Tehát $BT = 81°22'16" = 1,42019 = 9042$ km.

$$\sin(ETB\sphericalangle) = \sin(BET\sphericalangle)\frac{\sin(EB)}{\sin(BT)} = 0,58966$$

Tehát $ETB\sphericalangle = 35°59'28" = 0,62816$

$$\cos(TBE\sphericalangle) = -\cos(ETB\sphericalangle)\cos(BET\sphericalangle) + \sin(ETB\sphericalangle)\sin(BET\sphericalangle)\cos(ER)$$

Innen $\cos(TBE\sphericalangle) = 0,70768$, $TBE\sphericalangle = 44°57'14" = 0,78459$

Legészakibb pontot jelölje P. Vizsgáljuk a BEP háromszöget:
$EPB\sphericalangle = 90°$, $PBE\sphericalangle = TBE\sphericalangle = 44°57'14"$
$\sin(EP) = \sin(EB)\frac{\sin(EBP\sphericalangle)}{\sin(EPB\sphericalangle)} = 0,47733$
Tehát $EP = 28°30'40"$.
P szélességi koordinátája: É.sz.:$90° - 28°30'40" = 61°29'20"$.
$0 = \cos(EPB\sphericalangle) = -\cos(EBP\sphericalangle)\cos(BEP\sphericalangle) + \sin(EBP\sphericalangle)\sin(BEP\sphericalangle)\cos(EB)$
$0,70768\cos(BEP\sphericalangle) = 0,52091\sin(BEP\sphericalangle)$
$\tan(BEP\sphericalangle) = 1,35854$, tehát $BEP\sphericalangle = 53°38'37"$
$19° + 53°38'37" = 72°38'37"$ Ebből P hosszúsági koordinátája: K.h. $72°38'37"$.

Mivel mindkét város az északi félgömbön van, így a legdélibb pont biztosan az egyik végpont kell legyen. Tehát az útvonal legdélebbi pontja Tokió.

4.feladat. A gömbháromszög csúcsai:
Budapest: É.sz.47°30′, K.h.19°
Moszkva: É.sz.55°45′, K.h.37°37′
New York: É.sz.40°43′, Ny.h.74°
Jelölje Budapestet B, Moszkvát M, New Yorkot N, az északi sarkot pedig E.
$R = 6367$ km
$EB = 90° - 47°30' = 42°30'$
$EM = 90° - 55°45' = 34°15'$
$EN = 90° - 40°43' = 49°17'$
$BEM\sphericalangle = 37°37' - 19° = 18°37'$
$BEN\sphericalangle = 74° + 19° = 93°$

$MEN\sphericalangle = 74° + 37°37' = 111°37'$
$\cos(BM) = \cos(EB)\cos(EM) + \sin(EB)\sin(EM)\cos(BEM\sphericalangle) = 0,96976$
Tehát $BM = 14°7'38" = 0,24657 = 1570$ km.
$\cos(BN) = \cos(EB)\cos(EN) + \sin(EB)\sin(EN)\cos(BEN\sphericalangle) = 0,45414$
Tehát $BN = 62°59'25" = 1,09939 = 7000$ km.
$\cos(MN) = \cos(EN)\cos(EM) + \sin(EN)\sin(EM)\cos(MEN\sphericalangle) = 0,38205$
Tehát $MN = 67°32'21" = 1,17878 = 7505$ km.
Ismerjük BMN háromszög minden oldalát, így szögek könnyen számíthatók:
$MBN\sphericalangle = 105°33'59" = 1,84248$
$BMN\sphericalangle = 68°13'59" = 1,19089$
$MNB\sphericalangle = 14°44'22" = 0,25725$
Tehát a gömbi háromszög területe:
$T = (MBN\sphericalangle + BMN\sphericalangle + MNB\sphericalangle - \pi)R^2 = 0,14903R^2 = 6041373 \text{ km}^2$

Jelölje a BM, BN, MN egyenesek legészakibb pontjait rendre P_1, P_2, P_3.

$$\sin(EBM\sphericalangle) = \sin(BEM\sphericalangle)\frac{\sin(EM)}{\sin(BM)} = 0,73611$$

Tehát $EBM\sphericalangle = 47°24'44" = 0,82731$
$EP_1B\sphericalangle = 90°$, $EBP_1\sphericalangle = EBM\sphericalangle = 47°24'44"$

$$\sin(EP_1) = \sin(EB)\frac{\sin(EBP_1\sphericalangle)}{\sin(EP_1B\sphericalangle)} = 0,4974$$

Tehát $EP_1 = 29°49'41" = 0,5206 = 3315$ km.
Hasonlóan kiszámolható a másik két keresett sugár:
$EP_2 = 35°1'37" = 0,61134 = 3892$ km
$EP_3 = 25°24'44" = 0,44353 = 2824$ km

Ebből látszik, hogy ha P_3 az MN szakasz belsejébe esik, akkor az a kerület legészakibb pontja:
P_3 szélességi koordinátája: É.sz.:$90° - 25°24'44" = 64°35'16"$.

$$\sin(ENM\sphericalangle) = \sin(MEN\sphericalangle)\frac{\sin(EM)}{\sin(NM)} = 0,56617$$

$ENP_3\sphericalangle = ENM\sphericalangle = 34°29'1"$
$0 = \cos(EP_3N\sphericalangle) = -\cos(ENP_3\sphericalangle)\cos(NEP_3\sphericalangle) + \sin(ENP_3\sphericalangle)\sin(NEP_3\sphericalangle)\cos(EN)$
$0,82429\cos(NEP_3\sphericalangle) = 0,36932\sin(NEP_3\sphericalangle)$
$\tan(NEP_3\sphericalangle) = 2,23189$, tehát $NEP_3\sphericalangle = 65°51'55"$
$74° - 65°51'55 = 8°8'5"$
Ebből P_3 hosszúsági koordinátája: Ny.h. $8°8'5"$.

Mivel mindhárom város az északi félgömbön van, így a kerület legdélibb pontja csak egy végpont lehet: New York.

5.feladat. <u>*Feuerbach – kor*</u>: A háromszög oldalainak felezőpontjai, magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak. Ennek a körnek a középpontja felezi a magasságpontot és a háromszög köré írt kör középpontját összekötő szakaszt. Sugara a háromszög köré írt kör sugarának a fele.

Bizonytas: Legyen O pont a vonatkoztatási pontunk, ez az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Jelöljük az oldalfelező pontokat F_a, F_b, F_c-vel, a magasságok talpontjait T_a, T_b, T_c-vel, a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjait pedig M_1, M_2, M_3-mal. Így OA=$\mathbf{a}$, OB=$\mathbf{b}$, OC=$\mathbf{c}$, $OF_a = \mathbf{a}'$, $OF_b = \mathbf{b}'$, $OF_c = \mathbf{c}'$, $OM_1 = \mathbf{a}''$, $OM_2 = \mathbf{b}''$, $OM_3 = \mathbf{c}''$.

M a magasságpont, $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. F-ből az F_a-ba mutató vektor $\mathbf{a}' - f = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{-\mathbf{a}}{2}$. F_a-ból M_1-be mutató vektor $\mathbf{a}'' - f = \frac{\mathbf{m}+\mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{m}}{2} = \frac{\mathbf{a}}{2}$.

Így F_a és M_1 rajta vannak egy F középpontú körön, és a köztük lévő szakasz a kör egy átmérőjét adja. A T_a pontból az F_aM_1 szakasz derékszög alatt látszik, így Thalesz-tétele alapján T_a is rajta van a körön. A másik két ponthármas hasonlóan vizsgálható.

Feuerbach − tetel: A Feuerbach-kör érinti mindhárom hozzáírt körét a háromszögnek, és belülről érinti a beírt kört.

Feuerbach − gomb: Egy magasságpontos tetraéder következő 12 pontja egy gömbön helyezkedik el: a lapok súlypontjai, a lapok magasságpontjai, és a csúcsokat a magasságponttal összekötő szakasz magasságponthoz közelebbi harmadolópontjai. A gömb középpontja a magasságpont és a körülírt gömb középpontját összekötő szakasz magasságponthoz közelebbi harmadolópontja, sugara a körülírt gömb sugarának harmada.

Bizonytas: http://mtkacz.republika.pl/sphere12.html