420. $2x + y + z - 2 = 0.$

421. $x + y + 3z - 9 = 0.$

422. Az $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ alakban adott felület meghatározott darabjainak felszinét a

$$F = \iint\limits_{(T)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

képlet segitségével számithatjuk ki. Ezen képletben

$$E = \underline{r}_u^2 ; \quad F = \underline{r}_u \underline{r}_v ; \quad G = \underline{r}_v^2 .$$

Ezeket kiszámitjuk és helyettesitünk a képletbe.

$$\underline{r}_u = \underline{i}(-\sin u - v \cos u) + \underline{j}(\cos u - v \sin u) + \underline{k},$$

$$\underline{r}_v = -\underline{i} \sin u + \underline{j} \cos u + \underline{k},$$

$$E = \underline{r}_u^2 = (-\sin u - v\cos u)^2 + (\cos u - v \sin u)^2 + 1 =$$

$$= v^2 + 2 ,$$

$$F = r_u \cdot r_v = (-\sin u - v \cos u)(-\sin u) +$$

$$+ (\cos u - v \sin u)\cos u + 1 = 2,$$

$$G = \underline{r}_u^2 = \sin^2 u + \cos^2 u + 1 = 2.$$

$$EG - F^2 = 2(v^2 + 2) - 2^2 = 2v^2.$$

A kiszámitandó felszin:

$$F = \int_0^1 \left\{ \int_0^{\pi} \sqrt{2}\, v\, du \right\} dv = \pi\sqrt{2} \int_0^1 v\, dv = \pi\sqrt{2} \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \pi \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

423. A $z = f(x,y)$ alakban adott felület meghatározott darabjának felszinét a

$$F = \iint\limits_{(T)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

képlet segitségével számitjuk ki. Itt $T$ a kérdéses felület darabnak az $[x, y]$ sikra vetett merőleges vetülete, az ugynevezett integrálási tartomány.

Kiszámitjuk a képletben szereplő mennyiségeket.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} ; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{2y^2} .$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^4}{4y^4}} = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{2y^2}\right)^2} ,$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = 1 + \frac{x^2}{2y^2} .$$

Helyettesitünk a képletbe:

$$F = \int_1^2 \left\{ \int_0^1 \left(1 + \frac{x^2}{2y^2}\right) dx \right\} dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{6y^2} + x\right]_0^1 dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{6y^2} + 1\right) dy =$$

$$= \left[-\frac{1}{6y} + y\right]_1^2 = -\frac{1}{12} + 2 - \left(-\frac{1}{6} + 1\right) = \frac{1}{12} + 1 = \frac{13}{12} .$$

424. Ez a R sugaru gömb. A nyolcad gömb felszinét az

$$\frac{1}{8} F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2}\, du \right\} du$$

integrál adja.

Kiszámitjuk az E, F, G mennyiségeket

$$x_u = -R \sin u \cos v; \quad x_v = -R \cos u \sin v;$$

$$y_u = -R \sin u \sin v; \quad y_v = +R \cos u \cos v;$$

$$z_u = R \cos u; \quad z_v = 0.$$