1. házi feladat

1.feladat.

Menelaosz-tétel. *Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, melyet e egyenes két pontban metsz: $B' \in \overline{AC}, A' \in \overline{BC}$ pontokban. Továbbá C' legyen az e egyenes metszéspontja az AB oldal meghosszabbításával. Ekkor:*

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = -A'B \cdot B'C \cdot C'A$$

Bizonyítás:
Legyen B csúcsból AC oldallal párhuzamos egyenes f, és ennek metszéspontja e-vel legyen P.
Ekkor $AB'C'$ és BPC' háromszögek hasonlóak, valamint $CA'B'$ és $BA'P$ háromszögek hasonlóak. Tehát:

$$\frac{AB'}{BP} = \frac{C'A}{C'B} \text{ és } \frac{CA'}{A'B} = \frac{B'C}{BP}$$

Ezeket összeszorozva:

$$\frac{AB'}{BP} \cdot \frac{CA'}{A'B} = \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{B'C}{BP}$$

Innen egyszerű átrendezéssel adódik a tétel állítása, ha felhasználjuk, hogy $C'B = -BC'$.

2.feladat. A három egyenes irányvektorai normálva:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{7}(2,3,-6)^T, \mathbf{b} = \frac{1}{9}(1,4,-8)^T, \mathbf{c} = \frac{1}{9}(-1,8,4)^T$$

Párhuzamos eltolás nem változtatja meg egy szakasz merőleges vetületét.
Toljuk el mindhárom egyenest az origóba: e, f, g
Feltehetjük, hogy a keresett szakasz egyik végpontja az origó.
Olyan pontokat kell keresni, melynek merőleges vetületei e, f, g egyenesekre rendre 2,3,1 távol vannak az origótól.

Azon pontok halmaza, melyek e-re merőleges vetületeinek az origótól vett távolságuk 2: két olyan sík, melyek normálvektora $\mathbf{a}$:

$$\alpha_{1,2} \text{ síkok egyenlete: } \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z = \pm 2$$

Hasonlóan megkapható:

$$\beta_{1,2} \text{ síkok egyenlete: } \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z = \pm 3$$

$$\gamma_{1,2} \text{ síkok egyenlete: } -\frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z = \pm 1$$

Tehát 8 különböző pont lesz megoldásnak(α, β, γ esetén két-két lehetőség):
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ választás esetén:

$$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z = 2 \text{ , } \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z = 3 \text{ , } -\frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z = 1$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $P_1 = (-5, 2, -3)^T$
Tehát a keresett szakasz hossza: $|OP_1| = \sqrt{38}$

Hasonlóképpen megkapható a másik 7 megoldás. (Ezek párba állíthatók, hiszen egy megoldást az origóra tükrözve, szintén megoldást kapunk)
$P_2 = -P_1 = (5, -2, 3)^T$, $|OP_2| = |OP_1| = \sqrt{38} \approx 6,164$
$P_{3,4} = \pm(\frac{137}{5}, -\frac{22}{25}, \frac{159}{25})^T$, $|OP_3| = |OP_4| \approx 28,142$
$P_{5,6} = \pm(-5, \frac{1}{5}, -\frac{39}{10})^T$, $|OP_5| = |OP_6| \approx 6,344$
$P_{7,8} = \pm(\frac{137}{5}, \frac{23}{25}, \frac{363}{50})^T$, $|OP_7| = |OP_8| \approx 28,360$

3.feladat. Adottak:

$$e \text{ egyenes: } \frac{x-9}{2} = y - 7 = \frac{-3z}{5}$$

$$f \text{ egyenes: } x + 1 = \frac{13-y}{4} = \frac{3z+27}{11}$$

e egyenes pontjai: $(2t + 9, t + 7, -\frac{5}{3}t)^T$
f egyenes pontjai: $(t - 1, 13 - 4t, \frac{11}{3}t - 9)^T$

Leolvasható a két irányvektor: $\mathbf{v}_e = (-2, 1, -\frac{5}{3})^T$, és $\mathbf{v}_f = (1, -4, \frac{11}{3})^T$

Jelölje a keresett transzverzálist g, $g \cap e := E$, $g \cap f := F$.

$$\mathbf{v}_g \parallel \mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f = (-3, -9, -9)^T \text{ , legyen } \mathbf{v}_g = (1, 3, 3)^T$$

Tehát valamilyen a, b, c valós paraméterekkel:
$E = (2a + 9, a + 7, -\frac{5}{3}a)^T$
$F = (b - 1, 13 - 4b, \frac{11}{3}b - 9)^T$
$E + c\mathbf{v}_g = F$
Ebből kapunk egy 3 ismeretlenes, 3 egyenletből álló egyenletrendszert, melynek a megoldása: $a = -3$, $b = 3$, $c = -1$. Visszahelyettesítve:

$$E = (3, 4, 5)^T \text{ , } F = (2, 1, 2)^T$$

g pontjai $E + t\mathbf{v}_g = (3 + t, 4 + 3t, 5 + 3t)^T$
g egyenlete innen leolvasható:

$$x - 3 = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{3}$$

4.feladat. Adottak az $e : x = 4 + t, y = 4 + t, z = 4 + t$ magasságegyenes és az $A(-3, 12, 4)^T$ pont. Látható, hogy A nincs rajta ezen az egyenesen. Tegyük fel, hogy a e egyenletű magasságegyenes a D csúcson megy át. Ha a az oldalak hossza, akkor a tetraéder magassága $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, a háromszögek magassága pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Felírhatjuk a ABC háromszög α síkját, mivel ismerjük a rajta lévő A pontot, és a normálvektorát, ami a magasságegyenes irányvektorával egyenlő, vagyis $v_e = (1, 1, 1)^T$. Így a sík egyenlete: $\alpha : x + y + z - 13 = 0$.

Az α sík és az e egyenes metszete az $O(\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{13}{3})^T$ pont. Az AO szakasz hossza az ABC háromszög A-ból induló magasságvonalának a kétharmada. $AO = (\frac{22}{3}, -\frac{23}{3}, \frac{1}{3})^T$, $|AO| = \frac{13\sqrt{6}}{3}$. Így kiszámítható az a oldalhossz, $a = 13\sqrt{2}$.

A D pontot megkaphatjuk, ha az O pontból $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$ irányba felmérünk $\frac{\sqrt{6}}{3}a$-t, vagyis: $D_{1,2} = O \pm \frac{26\sqrt{3}}{3}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$

$$D_1(13, 13, 13)^T \ , \ D_2\left(-\frac{13}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{13}{3}\right)^T$$

Ha az A ponthoz az AO irányban felmérünk $\frac{13\sqrt{6}}{2}$-t, akkor a CB szaksz felezőpontját kapjuk:

$$F_A = A + \frac{AO}{|AO|} = A + \frac{13\sqrt{6}}{2}\left(\frac{22\sqrt{6}}{78}, -\frac{23\sqrt{6}}{78}, \frac{\sqrt{6}}{78}\right)^T = \left(8, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)^T$$

Az $AO \times v_e = (-8, -7, 15)^T$ szorzat megadja CB irányát. F_A-ból ilyen irányban $\frac{13\sqrt{2}}{2}$-t felmérve megkapjuk a B és C pontokat, tehát: $F_A \pm \frac{13\sqrt{2}}{2}(-\frac{4\sqrt{2}}{13}, -\frac{7\sqrt{2}}{26}, \frac{15\sqrt{2}}{26})^T = B, C$. Tehát:

$$B(4, -3, 12)^T \text{ és } C(12, -4, -3)^T \text{ (vagy fordítva)}$$

5.feladat. Legyenek a P_1, P_2, P_3, P_4, M, N pontok helyvektorai rendre: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$.

$$\frac{P_1M}{MP_2} = \gamma \text{ , és } \frac{P_3N}{NP_4} = \gamma$$

tehát:

$$\mathbf{m} - \mathbf{a} = \gamma(\mathbf{b} - \mathbf{m})$$
$$\mathbf{n} - \mathbf{c} = \gamma(\mathbf{d} - \mathbf{n})$$

Jelölje $(P_1, P_2, P_3, P_4), (P_1, P_3, M, N), (P_2, P_4, M, N)$ pontnégyesek súlypontjai rendre: S_1, S_2, S_3, helyvektoraik: $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$$
$$\mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{m} + \mathbf{n}}{4}$$
$$\mathbf{s}_3 = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{d} + \mathbf{m} + \mathbf{n}}{4}$$

Elég belátni, hogy S_2S_1 és S_1S_3 vektorok párhuzamosak.

$$S_2S_1 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{m}) + (\mathbf{d} - \mathbf{n})}{\mathbf{4}}$$

$$S_1S_3 = \mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1 = \frac{(\mathbf{m} - \mathbf{a}) + (\mathbf{n} - \mathbf{c})}{\mathbf{4}} = \gamma\frac{(\mathbf{b} - \mathbf{m}) + (\mathbf{d} - \mathbf{n})}{\mathbf{4}}$$

Tehát S_1, S_2, S_3 pontok egy egyenesre esnek, és az osztási arány:

$$\frac{S_1S_3}{S_2S_1} = \gamma$$