2. házi feladat

1.feladat.

$$[(\mathbf{a}\times\mathbf{p})(\mathbf{b}\times\mathbf{q})(\mathbf{c}\times\mathbf{r})] = (\mathbf{a}\times\mathbf{p})\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{q})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{r})] =$$

$$= (\mathbf{a}\times\mathbf{p})\cdot[\mathbf{c}(\mathbf{bqr}) - \mathbf{r}(\mathbf{bqc})] = (\mathbf{apc})(\mathbf{bqr}) - (\mathbf{apr})(\mathbf{bqc})$$

A másik két tagban a vegyesszorzat sorrendjét változtassuk meg, majd az első taghoz hasonlóan fejtsük ki:

$$[(\mathbf{a}\times\mathbf{q})(\mathbf{b}\times\mathbf{r})(\mathbf{c}\times\mathbf{p})] = [(\mathbf{b}\times\mathbf{r})(\mathbf{c}\times\mathbf{p})(\mathbf{a}\times\mathbf{q})] = (\mathbf{bra})(\mathbf{cpq}) - (\mathbf{brq})(\mathbf{cpa})$$

$$[(\mathbf{a}\times\mathbf{r})(\mathbf{b}\times\mathbf{p})(\mathbf{c}\times\mathbf{q})] = [(\mathbf{c}\times\mathbf{q})(\mathbf{a}\times\mathbf{r})(\mathbf{b}\times\mathbf{p})] = (\mathbf{cqb})(\mathbf{arp}) - (\mathbf{cqp})(\mathbf{arb})$$

Ezt a három eredményt összeadva valóban nullát kapunk, mivel például: $(\mathbf{apc}) = -(\mathbf{cpa})$, és $(\mathbf{bqr}) = -(\mathbf{brq})$, ezért $(\mathbf{apc})(\mathbf{bqr}) = (\mathbf{brq})(\mathbf{cpa})$.

2.feladat. Adottak: $A(2,3,1)^T, B(5,6,1)8^T, C(1,0,2)^T$

Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA} = (1,3,-1)^T$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB} = (4,6,-1)^T$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$

Tudjuk, hogy a tetraéder térfogata: $|\frac{1}{6}(\mathbf{abc})| = \frac{7}{2}$, tehát $(\mathbf{abc}) = \pm 21$

Tudjuk, hogy D csúcs azonos távolságra van a koordinátasíkoktól.
Az ilyen tulajdonságú pontok 4 egyenesen helyezkednek el:

1.eset $D(k,k,k)$, tehát $\mathbf{c} = (k-1, k, k-2)^T$

$$(\mathbf{abc}) = \det\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ k-1 & k & k-2 \end{vmatrix} = 9 - 6k = \pm 21$$

Innen: $k_1 = 5, k_2 = -2$, tehát: $D_1(5,5,5)^T, D_2(-2,-2,-2)^T$

2.eset $D(-k,k,k)$, tehát $\mathbf{c} = (-k-1, k, k-2)^T$

$$(\mathbf{abc}) = 9 - 12k = \pm 21$$

Innen: $k_3 = \frac{5}{2}, k_4 = -1$, tehát: $D_3(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})^T, D_4(1,-1,-1)^T$

3.eset $D(k,k,-k)$, tehát $\mathbf{c} = (-k-1, k, -k-2)^T$

$$(\mathbf{abc}) = 9 + 6k = \pm 21$$

Innen: $k_5 = -5, k_6 = 2$, tehát: $D_5(-5,-5,5)^T, D_6(2,2,-2)^T$

4.eset $D(k,-k,k)$, tehát $\mathbf{c} = (-k-1, k, -k-2)^T$

$$(\mathbf{abc}) = 9 = \pm 21$$

Tehát ezen az egyenesen nincs olyan D pont mely megoldást ad.
Ez az egyenes párhuzamos ABC síkjával.

Így összesen 6 megoldás van.

További adatokat $D(5,5,5)^T$ esetre számolom ki:

$$\text{Súlypont: } S = \frac{A+B+C+D}{4} = \left(\frac{13}{4}, \frac{14}{4}, \frac{9}{4}\right)^T$$

Körülírt gömb középpontja: $O(x_1, y_1, z_1)^T$, sugara: R

$$(2-x_1)^2 + (3-y_1)^2 + (1-z_1)^2 = R^2$$
$$(5-x_1)^2 + (6-y_1)^2 + (1-z_1)^2 = R^2$$
$$(1-x_1)^2 + y_1^2 + (2-z_1)^2 = R^2$$
$$(5-x_1)^2 + (5-y_1)^2 + (5-z_1)^2 = R^2$$

Ebből az egyenletrendszerből: $O = (\frac{127}{14}, -\frac{15}{14}, \frac{19}{14})^T$, és $R = \frac{5\sqrt{523}}{14}$

Beírt gömb középpontja legyen $Q(x_2, y_2, z_2)^T$, sugara r.
A tetraéder lapsíkjainak normált egyenletébe helyettesítve Q-t:

$$ABC \text{ sík egyenletébe: } \frac{|-x_2 + y_2 + 2z_2 - 3|}{\sqrt{6}} = r$$

$$ACD \text{ sík egyenletébe: } \frac{|2x_2 - y_2 - z_2|}{\sqrt{6}} = r$$

$$BCD \text{ sík egyenletébe: } \frac{|23x_2 - 16y_2 - 4z_2 - 15|}{\sqrt{801}} = r$$

$$ABD \text{ sík egyenletébe: } \frac{|-4x_2 + 4y_2 + z_2 - 5|}{\sqrt{33}} = r$$

Ennek az egyenletrendszernek az egyetlen olyan megoldása, ahol $r > 0$, és $(x_2, y_2, z_2)^T$ pont a tetraéder belsejébe esik:

$$r \approx 0.29987, Q \approx (2.8032, 3.2061, 1.6658)^T$$

3.feladat. $A(1,1,1)^T, B(2,2,2)^T, C(-1,2,0)^T$
ABC háromszög síkjának normálvektora: $\mathbf{v} := CB \times CA = (2,1,-3)^T$
A keresett síkot jelölje α. Mivel ez illeszkedik az x-tengelyre, ezért a normálvektora: $\mathbf{n}_\alpha = (0,p,q)^T$, feltehetjük, hogy $p^2 + q^2 = 1$

Használjuk fel, hogy egy T területű β síkú háromszög merőleges vetületének területe az α síkra $= T\cos\phi$, ahol ϕ jelöli a két sík hajlásszögét.
Tehát kell, hogy $cos\phi = \frac{1}{2}$

$$p - 3q = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\alpha = |\mathbf{v}|\cos\phi = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Tehát:

$$p = 3q + \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ , és } p^2 + q^2 = 1$$

Innen a két megoldás:

$$p_1 = \frac{1}{20}(\sqrt{14} + 3\sqrt{26}), q_1 = \frac{1}{20}(-3\sqrt{14} + \sqrt{26})$$
$$p_1 = \frac{1}{20}(\sqrt{14} - 3\sqrt{26}), q_1 = \frac{1}{20}(-3\sqrt{14} - \sqrt{26})$$

Síkegyenlet: $py + qz = 0$

4.feladat.

(a) Legyenek az A, B, C, D csúcsokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$.
Tegyük fel, hogy $AB \perp CD$ és $AC \perp BD$.
Merőlegesek, tehát skalárszorzatuk nulla:

$$0 = (\mathbf{b} - \mathbf{a})(\mathbf{d} - \mathbf{c}) = \mathbf{bd} + \mathbf{ac} - \mathbf{bc} - \mathbf{ad}$$

$$0 = (\mathbf{c} - \mathbf{a})(\mathbf{d} - \mathbf{b}) = \mathbf{cd} + \mathbf{ab} - \mathbf{ad} - \mathbf{cb}$$

A két egyenletet kivonva egymásból:

$$0 = \mathbf{bd} + \mathbf{ac} - \mathbf{cd} - \mathbf{ab} = (\mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{d} - \mathbf{a})$$

Mivel a skalárszorzatuk nulla, ezért $CB \perp AD$.

(b) Jelölje α_{PQR} a P, Q, R pontok által meghatározott síkot.
Használjuk fel: ha egy vektor merőleges egy sík két, nem párhuzamos vektorával, akkor a sík minden vektorával merőleges.

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\alpha_{BCD} \perp \overrightarrow{AM_A} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AM_A}$$

$$\text{Tehát: } \overrightarrow{CD} \perp \alpha_{ABM_A}$$

Analóg módon belátható, hogy $\overrightarrow{CD} \perp \alpha_{ABM_B}$.
Ebből az következik, hogy $\alpha_{ABM_A} = \alpha_{ABM_B}$, tehát A, B, M_A, M_B pontok egy síkban vannak, emiatt m_A és m_B magasságegyenesek metszik egymást.
Ugyanezen gondolatmenet alapján mind a 4 magasságegyenes páronként metszi egymást, amiből következik, hogy mind átmennek egy M magasságponton.

(c) Legyen az origó a tetraéder körülírt gömbjének középpontja.
Ekkor $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}|$, tehát $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{d}^2$
Legyen M pont, melynek helyvektora: $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$

Állítás: M éppen a feladatban leírt Monge-pontja a tetraédernek.

Bizonyítás:
Jelölje az AB élre merőleges síkot, mely átmegy a CD él felezőpontján α_{AB}. Ennek a síknak az egyenlete:

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(x,y,z)^T-(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\frac{(\mathbf{c}+\mathbf{d})}{2}=0$$

Helyettesítsük be M pont helyvektorát:

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{m}-(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\frac{(\mathbf{c}+\mathbf{d})}{2}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{2}=\frac{\mathbf{b^2}-\mathbf{a^2}}{2}=0$$

Ez azt jelenti, hogy $M\in\alpha_{AB}$.
Teljesen analóg módon igazolható, hogy M eleme a mind a 6 megadott síknak.
Megjegyzés: Ha létezik magasságpont, akkor az egybeesik ezzel.

5.feladat.

(a) **Feuerbach-kör:** *A háromszög oldalfelező pontjai, magasságtalppontjai és a magasságpont és a csúcsok által meghatározott szakaszok felezőpontjai egy körön vannak. Ezt a kört a háromszög Feuerbach-körének nevezzük. E kör középpontja a magasságpont és a körülírt kör középpontját összekötő szakasz felezőpontja, sugara a körülírt kör sugarának fele.*

Bizonyítás: Jelölések
Csúcsok: A,B,C
Magasságpont: M
Körülírt kör középpontja legyen az origó: O
Körülírt kör sugara: r
Oldalfelező pontok: A_1,B_1,C_1
Magasság talppontok: A_2,B_2,C_2
Magasságpont és a csúcspontok által meghatározott szakaszok felezőpontjai: A_3,B_3,C_3
Helyvektoraik: $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{m},\mathbf{a_1},\mathbf{b_1},\mathbf{c_1},\mathbf{a_2},\mathbf{b_2},\mathbf{c_2},\mathbf{a_3},\mathbf{b_3},\mathbf{c_3}$

$\mathbf{m}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ (*bizonyítás (b) feladatrészben*)
Legyen F az OM szakasz felezőpontja. Helyvektora: $\mathbf{f}=\frac{\mathbf{m}}{2}=\frac{\mathbf{a+b+c}}{2}$

$$\mathbf{a}_1=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\Rightarrow\overrightarrow{FA_1}=-\frac{\mathbf{a}}{2}\Rightarrow|\overrightarrow{FA_1}|=\frac{r}{2}$$
$$\mathbf{a}_3=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{m}}{2}\Rightarrow\overrightarrow{FA_3}=\frac{\mathbf{a}}{2}\Rightarrow|\overrightarrow{FA_3}|=\frac{r}{2}$$

Ez bizonyítja, hogy A_1A_3 egy átmérője az F körüli $\frac{r}{2}$ sugarú körnek.
A_2-ből derékszög alatt látszik A_1A_3 szakasz, tehát Thalesz-tétel alapján A_2 szintén eleme az F körüli $\frac{r}{2}$ sugarú körnek.

Analóg módon igazolható B_1,B_2,B_3 és C_1,C_2,C_3 pontokról is, hogy mind $\frac{r}{2}$ távol helyezkednek el F-től.

(b) **Euler-egyenes:** *A háromszög M magasságpontja, S súlypontja, és a köré írt kör O középpontja egy egyenesen van. Az S pont az MO szakasz O-hoz* *közelebbi harmadolópontja.*

Bizonyítás: Használjuk (a) feladat jelöléseit.
Könnyen látható, hogy $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, hiszen ekkor $AM = \mathbf{b} + \mathbf{c} \perp \mathbf{b} - \mathbf{a} = AB$ tehát M rajta van az A-ból induló magasságegyenesen.
Hasonlóan M rajta van a másik 2 magasságegyenesen, tehát valóban ez a magasságpont.
Tudjuk, hogy S helyvektora: $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$

Tehát: $\mathbf{m} = 3\mathbf{s}$, ami bizonyítja a tétel minden állítását.

(c) Használjuk (a) feladat jelöléseit. Adottak: A, F, M.
Szerkesztés lépései:

1. A_3 pontot megkapom, mint AM szakasz felezőpontját.
2. A_1 pontot megkapom, ha tükrözöm A_3-at F pontra.
   bizonyítva (a) feladatban
3. O pontot megkapjuk, ha tükrözöm M-et F pontra.
4. BC oldalegyenest megkapom, ha A_1 pontból merőlegest szerkesztek OA_1 szakasszal.
5. O pontból $AO = r$ sugárral körívezve, BC oldalegyenes ismeretében megkapjuk B, C csúcsokat.