3. házi feladat

1.feladat. Helyezzük el az ABC háromszöget a komplex számsíkon úgy, hogy C legyen az origó, és ABC egy pozitív körbejárása legyen a háromszögnek.
Ekkor:
$B' = B(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *, mivel ez α szögű forgatás*
$A' = A(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ *, mivel ez $(-\alpha)$ szögű forgatás*
$A'B = B - A' = A(-\cos\alpha + i\sin\alpha) + B$
$AB' = B' - A = -A + B(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)A'B = (-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)A + B(\cos\alpha + i\sin\alpha) = AB'$
Ez azt jelenti, hogy $A'B$ vektort α szöggel forgatva megkapjuk AB' vektort.

Ezzel bizonyítottuk, hogy a két szakasz hossza azonos, és bezárt szögük α.

2.feladat. Vegyük észre:
cb egy A körüli $-120°$os forgatás.
ac egy B körüli $-120°$os forgatás.
ba egy C körüli $-120°$os forgatás.
Tehát ezek kompozíciója: **cbacba** $= (\mathbf{cba})^{\mathbf{2}}$ egy eltolás.
Az eltolás vektorát megkapjuk, ha egy tetszőleges pont *(célszerűen az egyik csúcs)* képét megkeressük. Az eltolás vektora: $3\overrightarrow{CA}$.

Ezek alapján $(\mathbf{cba})^{2016}$ szintén egy eltolás, melynek vektora $3024\overrightarrow{CA}$.
Ebből pedig már triviálisan következik a feladat állítása.

3.feladat. Jelölje S_1, S_2 körök középpontjait O_1, O_2.

(a) Tegyük fel, hogy létezik megoldás e egyenes, melynek S_1-el való metszéspontjai A és B, S_2-vel való metszéspontjai C és D. Tehát: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Toljuk el S_2 kört $\overrightarrow{CA}$ vektorral. Ekkor $C' = A$ és $D' = B$.
Továbbá $O_1O_2' \perp AB \Rightarrow O_1O_2' \perp e_1$.

Tehát a szerkesztés menete:
Állítsunk O_1-ből merőlegest e_1-re: f.
Toljuk el S_2 kört e_1-el párhuzamosan, úgy, hogy O_2 képe f-re essen.
$S_1 \cap S_2' = A, B$ tehát ezzel megkapjuk a keresett egyenest.

Diszkusszió:
Ha $|S_1 \cap S_2'| < 2$, akkor nincs megoldás.
Ha $|S_1 \cap S_2'| = 2$, akkor a megoldás egyértelmű.
Ha $S_1 = S_2'$, akkor végtelen sok megoldás van.
Ekkor a kér kör sugara azonos, és $O_1O_2 || e_1$

(b) Tegyük fel, hogy létezik megoldás e egyenes, melynek S_1-el való metszéspontjai A és B, S_2-vel való metszéspontjai C és D.

Legyen $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ azonos irányú.

Toljuk el S_2 kört $\overrightarrow{CB}$ vektorral.
Ekkor $C' = B$, tehát: $|AD'| = |AB| + |CD| = |a|$.
Állítsunk e_1-re merőleges egyeneseket O_1 és O_2'ből: f_1, f_2.
Könnyen látható, hogy $d(f_1, f_2) = \frac{1}{2}|AD'| = \frac{|a|}{2}$

Tehát a szerkesztés menete:
Húzzuk be f_1 egyenest, majd toljuk el e_1-el párhuzamosan $\frac{|a|}{2}$-vel: f_2
Toljuk el S_2 kört, úgy hogy O_2 képe f_2-re essen.
$S_1 \cap S_2' = B$. Húzzunk B-n keresztül párhuzamost e_1-el.

Diszkusszió:
A megoldások száma S_1 és S_2' metszéspontjainak számával egyenlő.
Ez lehet $0, 1, 2$, vagy kontinuum, ha a egybeesik a két kör.

4.feladat. Először szerkesszük meg azt a Q pontot, melyre:

$$O_2^{-90^\circ} \circ O_1^{30^\circ} = Q^{-60^\circ}$$

Az O_1O_2Q háromszögből 2 pont adott, valamint ezen oldalon fekvő mindkét szöget ismerjük, így Q könnyen szerkeszthető:

$$O_2O_1Q\sphericalangle = 15^\circ$$
$$O_1O_2Q\sphericalangle = 135^\circ$$

A keresett transzformáció:

$$O_3^{-45^\circ} \circ O_2^{-90^\circ} \circ O_1^{30^\circ} = O_3^{-45^\circ} \circ Q^{-60^\circ} = P^{-105^\circ}$$

Az O_3QP háromszögből 2 pont adott, valamint ezen oldalon fekvő mindkét szöget ismerjük, így P könnyen szerkeszthető:

$$O_3QP\sphericalangle = 30^\circ$$
$$O_1O_2Q\sphericalangle = 22.5^\circ$$

A feladatban szereplő összes forgatás szöge szerkeszthető szög, tehát ezen háromszögek megszerkeszthetőek.

Legyen T_1 az O_1O_3 tengelyű, $\overrightarrow{O_1O_3}$ eltolású csúsztatva tükrözés, T_2 az O_3-ra való tükrözés, T_3 az O_1-re való tükrözés.

$$T_3 \circ T_2 \text{ egy eltolás, melynek vektora: } 2\overrightarrow{O_3O_1}$$

Tehát: $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = O_1O_3$ tengelyű $\overrightarrow{O_3O_1}$ vektorú csúsztatva tükrözés

5.feladat. Helyezzük el a két négyzetet a komplex számsíkon.
Jelölje az AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 szakaszok felezőpontjait rendre F_A, F_B, F_C, F_D.
Ekkor:
$C = B + (-i)(A - B)$, *mivel ez* $-90°$*-os forgatás*
$D = A + (i)(B - A)$, *mivel ez* $90°$*-os forgatás*
$C_1 = B_1 + (-i)(A_1 - B_1)$, *mivel ez* $-90°$*-os forgatás*
$D_1 = A_1 + (i)(B_1 - A_1)$, *mivel ez* $90°$*-os forgatás*
$F_A = \frac{1}{2}(A + A_1)$, $F_B = \frac{1}{2}(B + B_1)$

$$F_C = \frac{1}{2}(C + C_1) = \frac{1}{2}(B + B_1 + (-i)(A + A_1 - B - B_1)) = F_B + (-i)(F_A - F_B)$$

Tehát F_B csúcs körül $-90°$-al elforgatva F_A csúcsot F_C-t kapjuk.

$$F_D = \frac{1}{2}(D + D_1) = \frac{1}{2}(A + A_1 + (i)(B + B_1 - A - A_1)) = F_A + (i)(F_B - F_A)$$

Tehát F_A csúcs körül $90°$-al elforgatva F_B csúcsot F_D-t kapjuk.

Ez a két megállapítás bizonyítja, hogy $F_AF_BF_CF_D$ négyzetet alkot.