4. házi feladat

1.feladat. Jelölje a BC, AC, AB oldalakra való tükrözéseket rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, és tegyünk fel, hogy ABC egy negatív körbejárása a háromszögnek.
Ekkor $\mathbf{T} = \mathbf{abc}$ egy csúsztatva tükrözés, és

$$\mathbf{T}^2 = (\mathbf{ab})(\mathbf{ca})(\mathbf{bc}) = C^{2\gamma} \circ B^{2\beta} \circ A^{2\alpha}$$

$2(\alpha + \beta + \gamma) = 360°$), tehát $\mathbf{T}^2$ egy eltolás.

(a) T^{2018} eltolás, tehát $\mathbf{T}^{2018}(M)\mathbf{T}^{2018}(C) \parallel MC \perp AB$

(b) Egy csúsztatva tükrözés esetén a pont és képe közötti szakasz felezőpontja a tengelyre kell essen.
$\mathbf{T}^{2017}, \mathbf{T}^{2019}, \mathbf{T}^{2021}$ csúsztatva tükrözések, melyeknek ugyanaz a tengelye.

(c) $\mathbf{T}^{1000}$ egy eltolás. Tehát a két megadott vektor egyenlő, így az általuk meghatározott egyenesek párhuzamosak.

2.feladat. Hegyesszögű háromszögben a minimális kerületű beírt háromszög a talpponti háromszög.

Bizonyítás:
Legyen ABC egy tetszőleges hegyesszögű háromszög, és $A'B'C'$ egy minimális kerületű beírt háromszöge ABC-nek.
Legyen A' tükörképe b és c oldalegyenesekre rendre D, E
Legyen DE egyenes metszéspontja b, c egyenesekkel: $B", C"$.
Ekkor $K(A'B"C") = |DE| \leq K(A'B'C')$
Mivel $A'B'C'$-ről feltettük, hogy minimális beírt háromszög, ezért egyenlőségnek kell teljesülni, ami csak úgy lehetséges, ha $B' = B"$ és $C' = C"$.

Vegyük észre, hogy ADE háromszögben:
$|AD| = |AE| = |AA'|$ továbbá $DAE\sphericalangle = 2\alpha$.
Tehát $|DE|$ éppen akkor minimális, ha AA' minimális, ami ezt jelenti A' éppen az A-ból induló magasság talppontja.
Ugyanezen gondolatmenet alapján B', C' szintén talppontok.

Ha ABC nem hegyesszögű, akkor nem létezik minimális beírt háromszög, de adható éles alsó korlát a beírt háromszögek kerületére:
Legyen $\alpha \geq 90°$, A' az A-ból induló magasság talppontja.
Ekkor a beírt háromszögekre egy éles alsó korlát $2|AA'|$.

3.feladat. $A = (0, 2)^T$, $B = (-\sqrt{3}, -1)^T$, $C = (\sqrt{3}, -1)^T$
Egy szabályos háromszögnek 6 önmagára képező leképezése van:

- Tükrözés $x = 0$ egyenesre: $\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Tükrözés $x = \sqrt{3}y$ egyenesre: $\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

- Tükrözés $x = -\sqrt{3}y$ egyenesre: $\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

- Origó körüli 120° forgatás: $\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

- Origó körüli 240° forgatás: $\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

- Identitás: $\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.feladat. $\overrightarrow{PQ} = (3, -4, 0)^T$ irányvektora normálva: $\mathbf{v} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0)^T$
$\mathbf{R}_{90°,\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & -\frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$
Eltolási vektor: $(\mathbf{E} - \mathbf{R}_{90°,\mathbf{v}})(P) = (-\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}, -6)^T$
Tehát: $\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & -\frac{12}{25} & -\frac{4}{5} & -\frac{16}{5} \\ -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{3}{5} & -\frac{12}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(-1, 3, -5) \times (2, -1, -5) = (-20, -15, -5)$
Tehát POQ sík normálvektora: $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{26}}(4, 3, 1)^T$
$\mathbf{M_n} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -6 & -24 & -8 \\ -24 & 8 & -6 \\ -8 & -6 & 24 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}_2 = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -6 & -24 & -8 & 0 \\ -24 & 8 & -6 & 0 \\ -8 & -6 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \frac{1}{325}\begin{bmatrix} 37 & -216 & 240 & 1560 \\ -216 & 163 & 180 & 1170 \\ 240 & 180 & 125 & -1300 \\ 0 & 0 & 0 & 325 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}$$

Tehát a megadott sík képének egyenlete:
$19(37x - 216y + 240z + 1560) - (-216x + 163y + 180z + 1170) - (240x + 180y + 125z - 1300) = 81 \cdot 325$
Rendezve:

$$679x - 4447y + 4260z = -3445$$

5.feladat. Az oktaéder csúcsai:
$A, B = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)^T$
$C, D = (0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^T$
$E, F = (0, 0 \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^T$
ACE lap középpontja: $Q = (\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6})^T$
BDF lap középpontja: $P = (-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6})^T$
Tehát az eltolás nagysága: $\overrightarrow{PQ} = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})^T$
Irányvektor: $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$

A csavarmozgást mátrixa:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}(1, -3, 4, 1)^T = (4 + \frac{\sqrt{2}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}, -3 + \frac{\sqrt{2}}{3}, 1)^T$
Tehát $P' = (4 + \frac{\sqrt{2}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}, -3 + \frac{\sqrt{2}}{3})^T$
Az oktaéder csúcsainak képei:
$A, B = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3})^T$
$C, D = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^T$
$E, F = (\frac{\sqrt{2}}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})^T$