5. házi feladat

1.feladat. $x-2=y-1=z+2$ egyenes irányvektora: $\mathbf{v}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$

A transzformáció lineáris része: $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

$P=(2,1,-2)^T$ fixpont, így az eltolási vektor: $\mathbf{e}=(\mathbf{E}-\mathbf{R})P=(4,-1,-3)^T$

Tehát: $\mathbf{T}_1=\begin{bmatrix}0&0&1&4\\1&0&0&-1\\0&1&0&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$x=0, y=-2z$ egyenes irányvektora: $\mathbf{w}=(0,-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})^T$

Az egyenes átmegy az origón.

A homogénkoordinátás mátrixa: $\mathbf{T}_2=\begin{bmatrix}-1&0&1&0\\0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&0\\0&-\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Az eredő transzformáció, és annak inverze:

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}_2\cdot\mathbf{T}_1=\begin{bmatrix}0&0&-1&-4\\\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&0&\frac{9}{5}\\-\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&0&\frac{13}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix},\mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&1\\0&-\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&3\\-1&0&0&-4\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Tehát az új koordinátarendszerben:

$x=\frac{3}{5}y'-\frac{4}{5}z'+1$

$y=-\frac{4}{5}y'-\frac{3}{5}z'+3$

$z=-x'$

Az ellipszoid egyenlete az új koordinátarendszerben:

$$4\left(\frac{3}{5}y'-\frac{4}{5}z'+1\right)^2+2\left(-\frac{4}{5}y'-\frac{3}{5}z'+3\right)^2+x'^2=4$$

2.feladat. Az egyenesünk irányvektora: $\mathbf{n}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})^T$

Forgatvatükrözés lineáris mátrixa:

$\overline{\mathbf{R}}_{n,\phi}=-(1+\cos\phi)\mathbf{C}_n^2+\sin\mathbf{C}_n-\mathbf{E}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

Mivel P fixpont, így az eltolási vektor: $\mathbf{v}=(\mathbf{E}-\overline{\mathbf{R}}_{n,\phi})P=(\frac{8}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})^T$

Tehát:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{8}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Egy oktaéder csúcsai, és azok képe:
$A = (1, -1, 0)^T$, $A' = (\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})^T$
$B = (-1, 1, 0)^T$, $B' = (\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})^T$
$C = (1, 1, 0)^T$, $C' = (\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{1}{3})^T$
$D = (-1, -1, 0)^T$, $D' = (3, 0, -1)^T$
$E = (0, 0, \sqrt{2})^T$, $E' = (\frac{2\sqrt{2}+8}{3}, \frac{-\sqrt{2}-4}{3}, \frac{-2\sqrt{2}-2}{3})^T$
$F = (0, 0, -\sqrt{2})^T$, $F' = (\frac{-2\sqrt{2}+8}{3}, \frac{\sqrt{2}-4}{3}, \frac{2\sqrt{2}-2}{3})^T$

3.feladat. Ismert adatok: $a = 150°, b = 60°, \alpha = 150°$
$\sin\beta = \sin b \frac{\sin\alpha}{\sin a} = \sin b$, Innen: $\beta_1 = 60°$, $\beta_2 = 120°$

A további adatokat $\beta = 60°$ esetre számítom ki.
Másik megoldás esetén analóg módon számítható minden adat.

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$
$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$
Ebből az egyenletrendszerből: $c = 107°35'17"$, $\gamma = 72°24'43"$

Beírt kör középpontja legyen O, sugara r, érintési pontja AB oldallal P.
O a szögfelezők metszéspontja.
AOB háromszögre koszinusztétel:
$\cos(AOB\sphericalangle) = -\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos c = -0,37008$
Tehát $AOB\sphericalangle = 111°43'14"$.
$\cos OB = \frac{\cos 75° + \cos 30 \cos AOB\sphericalangle}{\sin 30 \sin AOB\sphericalangle} = -0,13279$
Tehát $OB = 97°37'50"$
Szinusztétel OBP háromszögre ($OP = r$):
$\sin r = \sin OB \sin 30° = 0,49557$
Tehát a beírt kör sugara: $r = 29°42'27"$

A köréírt kör középpontja legyen Q, sugara R.
Q az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, ezért ACO és ABO egyenlő szárú háromszögek. Legyen $OAC\sphericalangle = \phi$.
Írjunk fel erre a két háromszögre egy-egy koszinusztételt:
$\cos R \cos b + \sin R \sin b \cos\phi$
$\cos R \cos c + \sin R \sin c \cos(\alpha - \phi)$

Ebből az egyenletrendszerből $R = 104°49'53"$

4.feladat. Legyen s az a függvény, ami egy Euler sokszöghöz hozzárendeli az oldalösszegét.

Vegyünk egy tetszőleges Euler n-szöget, ahol $n > 2$, jelölje ezt A_n.
Képezzünk ebből egy Euler $(n-1)$-szöget a következő módon:

Válasszunk ki egy tetszőleges oldalát, majd töröljük ennek az oldalegyenesét. A maradék egyenesek által meghatározott Euler $(n-1)$-szög legyen A_{n-1}.
$s(A_n) < s(A_{n-1})$ a háromszög egyenlőtlenség miatt.

Ezt a lépést ismételjük, amíg 2-szöget kapunk:

$$s(A_n) < s(A_{n-1}) < ... < s(A_2) = 2\pi$$

5.feladat.

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \times (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})) = (\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))$$

$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \times (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})) - (\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) =$
$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \times (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) =$
$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \times (\mathbf{c}(\mathbf{ba}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc}) + \mathbf{a}(\mathbf{cb}) - \mathbf{b}(\mathbf{ca})) =$
$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \times (\mathbf{c}(\mathbf{ba} - \mathbf{b}(\mathbf{ca})) = (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b})) = \mathbf{0}$

Geometriai jelentés:
$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})), (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})), (\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}))$ Rendre az A, B, C csúcsból induló magasságegyenesek meghatározó vektorai.
Tehát az egyenlet bal oldalán az A és B csúcsokból induló két magasságegyenes metszéspontjának irányvektora van, a jobb oldalon két másik magasságegyenesé.

Így ez a vektoregyenlet éppen azt jelenti, hogy gömbi háromszögben is létezik magasságpont.