# 6. házi feladat

**1.feladat.** Vegyük észre, hogy az $ABC$ gömbi háromszög köré írt kör középpontjába mutató vektor iránya megegyezik az $ABC$ síkháromszög köré írt kör középpontjába mutató vektor irányával.
Ezt az irányt megkapjuk, mint $ABC$ sík normálvektorát:

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})$$

**2.feladat.** Egy rombikuboktaéder minden csúcsában 3 négyzet és egy háromszög találkozik.
Legyen $P$ egy csúcs, és az itt találkozó lapok középpontjait jelölje $A, B, C, D$, ahol $A$ legyen a háromszög középpontja, $C$ pedig annak a négyzetnek a középpontja, amely csak 1 lapban érintkezik a háromszöggel.
Vizsgáljuk $ABC$ háromszöget, ahol minden szög ismert (szimmetria okokból):

$$\alpha = 60°, \beta = 90°, \gamma = 45°$$

Innen oldalak koszinusztétellel számíthatók:

$$a = 45°, b = 54°44'8", c = 35°15'52"$$

Ebből leolvasható a két lapszög:
Két négyszög által meghatározott lapszög: $\phi_{4,4} = 180° - a = 135°$
Háromszög és négyszög által meghatározott: $\phi_{3,4} = 180° - c = 144°44'8"$

Beírt körök sugarait szintén le lehet olvasni:
$r_4 = a/2 = 22°30'$
$r_3 = c - r_4 = 12°45'52"$

$CBP$ egyenlőszáró háromszögre koszinusztétel:
$\cos CPB\sphericalangle = -(\cos 45°)^2 + (\sin 45°)^2 \cos a = -0,146447$
Ez éppen a négyzetek szögeit adja meg: $\delta_4 = 98°25'16" = 1,71777$
A háromszögek szögei: $\delta_3 = 360° - 3\delta_4 = 64°44'12"$
Területek:
$T_4 = 4\delta_4 - 2\pi = 0,5879$
$T_3 = 3\delta_3 - \pi = 0,24801$
*Ellenőrzésként lehet látni, hogy* $18T_4 + 8T3 = 4\pi$*, ami a teljes gömb felülete.*

Körülírt körök sugarai: $R_4 = BC$ az előző háromszögből megkapható:
$\cos 45° = -\cos 45° \cos\delta_4 + \sin 45° \sin\delta_4 \cos R_4$
Innen: $R_4 = 30°21'41"$
$R_3 = b - R_4 = 14°22'27"$

**3.feladat.** A csonkított kuboktaéder minden csúcsában egy négyszög, egy hatszög és egy nyolcszög találkozik.
Legyen $P$ egy tetszőleges csúcs, és legyenek $A, B, C$, rendre az itt találkozó hat-, négy-, nyolcszög középpontjai.

Vizsgáljuk $ABC$ háromszöget, ahol minden szög ismert (szimmetria okokból):

$$\alpha = 60°, \beta = 90°, \gamma = 45°$$

Innen oldalak koszinusztétellel számíthatók:

$$a = 45°, b = 54°44'8", c = 35°15'52"$$

Ebből leolvasható minden lapszög:
Négyszög és nyolcszög által meghatározott: $\phi_{4,8} = 180° - a = 135°$
Hatszög és nyolcszög által meghatározott: $\phi_{6,8} = 180° - b = 125°15'52"$
Négyszög és hatszög által meghatározott: $\phi_{4,6} = 180° - c = 144°44'8"$

**4.feladat.** Jelölje az Északi sarkot $E$, Londont $L$, Konstantinápolyt $K$.
Ismert: $EL = 38°29'$, $EK = 48°59'$, $LEK\sphericalangle = 29°36'$
Koszinusztétel $LEK$ háromszögben:
$\cos(LK) = \cos(EL)\cos(EK) + \sin(EL)\sin(EK)\cos(LEK\sphericalangle) = 0,92198$

Tehát $EL = 22°46'58" = 0,39764 = 2532$ km.

**5.feladat.** Jelölje az Északi sarkot $E$.
Budapest ($B$): É.sz. $47°30'$, K.h. $19°2'$
Párizs ($P$): É.sz. $48°51'$, K.h. $2°21'$
Madrid ($M$): É.sz. $40°25'$, Ny.h. $3°42'$
Tehát:
$EB = 42°30'$, $EP = 41°9'$, $EM = 49°35'$
$BEP\sphericalangle = 16°41'$, $BEM\sphericalangle = 22°44'$, $PEM\sphericalangle = 6°3'$

Koszinusztétel $BEP$ háromszögben:
$\cos(BP) = \cos(EB)\cos(EP) + \sin(EB)\sin(EP)\cos(BEP\sphericalangle) = 0,98101$
Tehát $BP = 11°11' = 0,1952 = 1243$ km
Koszinusztétel $BEM$ háromszögben:
$\cos(BM) = \cos(EB)\cos(EM) + \sin(EB)\sin(EM)\cos(BEM\sphericalangle) = 0,95241$
Tehát $BM = 17°44' = 0,30975 = 1972$ km
Koszinusztétel $PEM$ háromszögben:
$\cos(PM) = \cos(EP)\cos(EM) + \sin(EP)\sin(EM)\cos(PEM\sphericalangle) = 0,9864$
Tehát $PM = 9°28' = 0,16513 = 1051$ km

$BMP$ háromszögben minden oldal ismert, szögek koszinusztétellel számíthatóak:
$BMP\sphericalangle = 34°4'$, $BPM\sphericalangle = 118°23'$, $PBM\sphericalangle = 28°22'$
Tehát $BMP$ háromszög területe:

$$T_{BMP} = (BMP\sphericalangle + BPM\sphericalangle + PBM\sphericalangle - \pi)R^2 = 574762 \text{ km}^2$$

Budapest-Madrid főkör legészakibb pontját jelölje $X$.
$EBM$ háromszögre szinusztétel:
$\sin(EMB\sphericalangle) = \sin(BEM\sphericalangle)\frac{\sin(EB)}{\sin(BM)} = 0,85715$
Tudjuk, hogy ez a szög hegyes, tehát: $EMB\sphericalangle = 59°$

Vizsgáljuk $EXM$ háromszöget:
$EMX\sphericalangle = EMB\sphericalangle$, $EXM\sphericalangle = 90°$
$\sin(EX) = \sin(EM)\sin(EMX\sphericalangle) = 0,6526$
Tehát $EX = 40°44'$, amiből $X$ szélességi koordnátája: $49°16'$

Két koszinusztételt felírva:
$\cos(MX) = \cos(EM)\cos(EX) + \sin(EM)\sin(EX)\cos(MEX\sphericalangle)$
$\cos(MEX\sphericalangle) = \sin(EMX\sphericalangle)\cos(MX)$
Az egyenletrendszerből $MEX\sphericalangle = 42°49'$ adódik.
Tehát $X$ hosszúsági koordinátái: $42°49' - 3°42' = 39°7'$

$X$ pont koordinátái: K.h.$39°7'$ É.sz.$49°16'$