1. házi feladat

1.feladat Vetítsük le azt kockát, amin a másikat át akarjuk tolni egy testátlójára merőleges síkra. Jelölje a kocka élhosszát a.

A kocka vetülete szimmetria miatt egy szabályos hatszög lesz.
Egy kocka testátlójának, és egy tetszőleges élének bezárt szögét jelölje α.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ezt könnyen láthatjuk például, ha azt a egységkockát tekintjük, melynek egyik csúcsa az origó, és oldalai párhuzamosak a koordináta tengelyekkel.
Itt egy átló, és egy oldal skalárszorzata:

$$(1,1,1)^T \cdot (1,0,0)^T = 1 = \sqrt{3}\cos\alpha$$

Tehát a kocka egy oldalának bezárt szöge a vetítési síkkal $(90° - \alpha)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Tehát a kapott szabályos hatszög oldalhossza $\frac{\sqrt{6}}{3}a$.
A hatszög beírt körének sugara tehát:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Ebbe a körbe bele lehet rajzolni egy a oldalhosszú négyzetet úgy, hogy az teljesen a hatszögön belül legyen.

Ha ezt a négyzetet tekintjük a másik kocka merőleges vetületének a síkra, azzal bizonyítottuk, hogy lehetséges a feladatban leírt párhuzamos eltolás.

2.feladat

(a) **Ptolemaiosz tétele:** *Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög. Ekkor:*

$$|AB| \cdot |DC| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$$

Bizonyítás (c) feladatban.

(b) Igaz a tétel megfordítása is.
Bizonyítás (c) feladatban.

(c) **Ptolemaiosz egyenlőtlenség:** *Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög. Ekkor:*

$$|AB| \cdot |DC| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $ABCD$ húrnégyszög.

Bizonyítás:
Legyen X egy olyan pont BD átlón, melyre $XAB\sphericalangle = DAC\sphericalangle$.

Legyen Y egy olyan pont AC átlón, melyre $YBA\sphericalangle = DCA\sphericalangle$.
Továbbá legyen AX és BY metszéspontja E.

Ekkor ABE és ACD háromszögek hasonlóak. *2 szögben megegyeznek*

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|AD|} \Rightarrow |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BE|$$

Továbbá AED és ABC is hasonlóak, mivel megegyeznek 2 oldaluk arányában, és ezek közrezárt szögében: $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AD|}$ és $BAC\sphericalangle = EAD\sphericalangle$.

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|BC|} \Rightarrow |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |ED|$$

A két egyenletet összeadva:

$$|AB| \cdot |DC| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot (|BE| + |ED|) \geq |AC| \cdot |BD|$$

A háromszög egyenlőtlenség miatt az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha B, E, D egy egyenesre esnek. Vegyük észre, hogy ez pontosan azt jelenti, hogy $DBA\sphericalangle = DCA\sphericalangle$.
Tehát egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha DA szakasz azonos szögben látszik B és C csúcsokból, tehát $ABCD$ húrnégyszög.

3.feladat Jelöljék az A, B, C, D, M, N pontok helyvektorait rendre: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$.
Továbbá a téglalap oldalvektorai legyenek: $\mathbf{v} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}, \mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$.
Ezekkel a jelölésekkel rendezzük át a feladat állítását:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$$

$$(\mathbf{m} - \mathbf{a})(\mathbf{n} - \mathbf{a}) + (\mathbf{m} - \mathbf{c})(\mathbf{n} - \mathbf{c}) = (\mathbf{m} - \mathbf{b})(\mathbf{n} - \mathbf{b}) + (\mathbf{m} - \mathbf{d})(\mathbf{n} - \mathbf{d})$$

Ezt az egyenletet kifejtve és átrendezve:

$$\mathbf{a^2} + \mathbf{c^2} - \mathbf{b^2} - \mathbf{d^2} = (\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b} - \mathbf{d})(\mathbf{m} + \mathbf{n})$$

Ezen egyenlet bal oldala 0, mivel:

$$\mathbf{a^2} + \mathbf{c^2} - \mathbf{b^2} - \mathbf{d^2} = \mathbf{a^2} + (\mathbf{b} + \mathbf{v})^\mathbf{2} - \mathbf{b^2} - (\mathbf{a} + \mathbf{v})^\mathbf{2} = 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{v} = 2\mathbf{w}\mathbf{v} = 0$$

Felhasználtuk, hogy $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, így skalárszorzatuk 0.
Az egyenlet jobb oldala szintén 0, mivel:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b} - \mathbf{d}) = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) - (\mathbf{d} - \mathbf{a}) = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

4.feladat Használjuk a következő jelöléseket:
$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -1, -3)^T$
$\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = (3, -1, -2)^T$
$\mathbf{w} = \overrightarrow{AD} = (x + 4, 8, -7)^T$
Számítsuk ki a tetraéder térfogatát kétféleképpen:

$$V_{ABCD} = T_{ABC}\frac{m}{3} = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{2}\frac{6\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}2\sqrt{3} = 9$$

Mivel $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ balrendszert alkot, ezért az $\mathbf{uvw}$ vegyesszorzat negatív.
Emiatt a térfogat:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}(-\mathbf{uvw}) = \frac{1}{6}(x + 51)$$

A két egyenletet összeolvasva:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}(x + 51) = 9$$

Tehát: $x = 3$

5.feladat

(a) Jelölje a két megadott egyenest rendre e és f. A keresett transzverzálist jelölje g és a metszéspontokat rendre E, F. Ekkor:

$$E = (5 - 3a, 7 + 7a, 2 + 2a)^T$$

$$F = (3 - 2b, 14 + 3b, -3 + b)^T$$

$\overrightarrow{EF} = c\mathbf{v}$, tehát:

$$\overrightarrow{EF} = \begin{bmatrix} 3a - 2b - 2 \\ 3b - 7a + 7 \\ b - 2a - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -6c \\ 2c \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszert megoldva: $a = -2, b = -3, c = -2$.
Metszéspontok: $E = (11, -7, -2)^T, F = (9, 5, -6)^T$
g egy általános pontja: $E + t\mathbf{v}$, tehát g egyenlete:
$x = 11 + t, y = -7 - 6t, z = -2 + 2t$

(b) Legyen a két kitérő egyenes paraméteres egyenlete:
$(A + t\mathbf{v})$ és $(B + k\mathbf{w})$, ahol A, B a két egyenes egy-egy rögzített pontja, $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ az irányvektorok, t, k pedig paraméterek.
Ekkor a felezőpontok koordinátái:

$$\frac{(A + t\mathbf{v}) + (B + k\mathbf{w})}{2} = \frac{(A + B)}{2} + t\frac{\mathbf{v}}{2} + k\frac{\mathbf{w}}{2}$$

Ez a ponthalmaz a $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által generált altér eltoltja $\frac{(A+B)}{2}$ vektorral.
Mivel a két egyenes kitérő, így $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ lineárisan függetlenek, tehát az általuk generált altér kétdimenziós.

A keresett ponthalmaz tehát egy sík, melynek $\frac{(A+B)}{2}$ egy pontja, és normálvektora $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.