2. házi feladat

1.feladat

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})(\mathbf{e}\times\mathbf{f}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})[(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\times(\mathbf{e}\times\mathbf{f})] =$$

$$= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})[\mathbf{e}(\mathbf{cdf}) - \mathbf{f}(\mathbf{cde})] = (\mathbf{abe})(\mathbf{cdf}) - (\mathbf{abf})(\mathbf{cde})$$

2.feladat

(a) Legyen a két adott pontunk helyzete $A = (0,0), B = (1,0)$, továbbá legyen a távolságok aránya $\lambda > 0$.
Keressük azon $P = (x,y)$ pontok halmazát, melyekre:

$$\lambda|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$$

$$\lambda\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$\lambda^2x^2 + \lambda^2y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$
$$(\lambda^2-1)x^2 + 2x + (\lambda^2-1)y^2 = 1$$

Ha $\lambda = 1$, akkor a keresett ponthalmaz: $2x = 1$ az AB szakasz felezőmerőleges egyenese. Ha $\lambda \neq 1$, akkor tudunk osztani (λ^2-1)-el:

$$x^2 + \frac{2}{\lambda^2-1}x + y^2 = \frac{1}{\lambda^2-1}$$

$$\left(x + \frac{1}{\lambda^2-1}\right)^2 - \frac{1}{(\lambda^2-1)^2} + y^2 = \frac{1}{\lambda^2-1}$$
$$\left(x + \frac{1}{\lambda^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}$$

Innen könnyen leolvasható, hogy a keresett ponthalmaz egy kör, melynek középpontja $(-\frac{1}{\lambda^2-1}, 0)$, sugara pedig $|\frac{\lambda}{\lambda-1}|$.

Ez az Appollóniusz kör.

(b) 3 dimenzióban:
Legyen: $A = (0,0,0)^T, B = (1,0,0)^T$, továbbá a távolságok aránya $\lambda > 0$.
Keressük azon $P = (x,y,z)^T$ pontok halmazát, melyekre:

$$\lambda\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$$
$$\lambda^2x^2 + \lambda^2y^2 + \lambda^2z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2$$
$$(\lambda^2-1)x^2 + 2x + (\lambda^2-1)y^2 + (\lambda^2-1)z^2 = 1$$

Ha $\lambda = 1$, akkor a keresett ponthalmaz: $2x = 1$ az AB szakasz felezőmerőleges síkja. Ha $\lambda \neq 1$, akkor tudunk osztani (λ^2-1)-el:

$$x^2 + \frac{2}{\lambda^2-1}x + y^2 + z^2 = \frac{1}{\lambda^2-1}$$

$$\left(x+\frac{1}{\lambda^2-1}\right)^2-\frac{1}{(\lambda^2-1)^2}+y^2+z^2=\frac{1}{\lambda^2-1}$$
$$\left(x+\frac{1}{\lambda^2-1}\right)^2+y^2+z^2=\frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}$$

Innen könnyen leolvasható, hogy a keresett ponthalmaz egy gömb, melynek középpontja $(-\frac{1}{\lambda^2-1},0,0)^T$, sugara pedig $|\frac{\lambda}{\lambda-1}|$.

(c) Jelölje a két egyenesünket e, f.
Legyen e egyenes: $y=0$

1.eset: $e \parallel f$
Ekkor f egyenes egyenlete legyen: $y+1=0$
Keressük azon $P=(x,y)$ pontok halmazát, melyekre:

$$\lambda\cdot \mathrm{d}(P,e)=\mathrm{d}(P,f)$$

$$\lambda|y|=|y+1| \Rightarrow (1\pm\lambda)y=-1$$

Innen leolvasható, hogy a megoldáshalmaz 2 párhuzamos egyenes, ha $\lambda\neq 1$ és egy egyenes, ha $\lambda=1$.

2.eset: $e \nparallel f$
Legyen e és f metszéspontja az origó, és bezárt szögük α.
Ekkor f egyenes egyenlete legyen: $y\cos\alpha = x\sin\alpha$
Keressük azon $P=(x,y)$ pontok halmazát, melyekre:

$$\lambda\cdot \mathrm{d}(P,e)=\mathrm{d}(P,f)$$

$$\lambda|y|=|y\cos\alpha - x\sin\alpha|$$

$$(\cos\alpha\pm\lambda)y=x\sin\alpha$$

Tehát a megoldáshalmaz két metsző egyenes.
Megjegyzés: Ha $\lambda=1$ akkor ez a két egyenes merőleges.

(d) Jelölje a két egyenesünket e, f.
Legyen e egyenes az x-tengely: $y=z=0$
Keressük azon $P(x,y,z)^T$ pontok halmazát, melyekre:

$$\lambda\cdot \mathrm{d}(P,e)=\mathrm{d}(P,f)$$

1.eset $e\parallel f$ és $\lambda=1$
Legyen f egyenes: $y=1, z=0$
Ekkor a megoldáshalmaz egy sík: $y=\frac{1}{2}$

2.eset $e\parallel f$ és $\lambda\neq 1$
Legyen f egyenes: $y=1, z=0$
Tekintsünk egy olyan síkot, amely merőleges e, f egyenesekre. Ekkor a feladat két ponttól mért távolságok aránya állandó egy síkon. Ez 2/a feladat alapján egy kör.
Tehát a megoldáshalmaz egy végtelen hengerfelület.

3.eset e és f metsző egyenesek, és $\lambda = 1$

Legyen f egyenes: $y \cos\alpha = x \sin\alpha, z = 0$

$$\mathrm{d}(P, e) = \mathrm{d}(P, f)$$

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{(y \cos\alpha - x \sin\alpha)^2 + z^2}$$

Négyzetre elemelés, és átrendezés után:

$$((x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 = x^2$$

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \pm x$$

Tehát a megoldáshalmaz két merőleges sík.

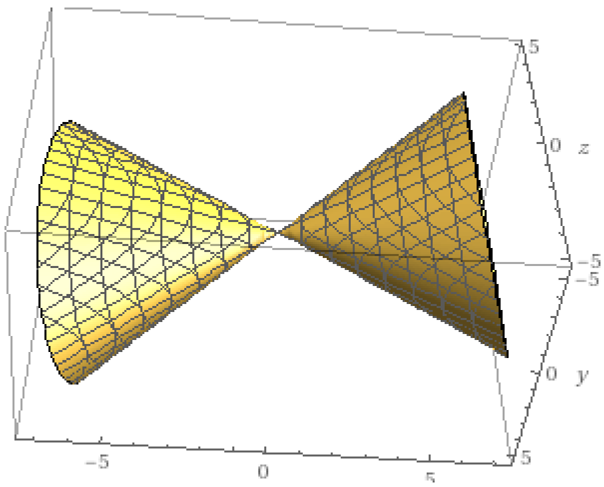
4.eset e és f metsző egyenesek, és $\lambda \neq 1$

Legyen f egyenes: $y \cos\alpha = x \sin\alpha, z = 0$

$$\lambda \cdot \mathrm{d}(P, e) = \mathrm{d}(P, f)$$

$$\lambda\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{(y \cos\alpha - x \sin\alpha)^2 + z^2}$$

Megoldáshalmaz egy végtelen elliptikus kúp.



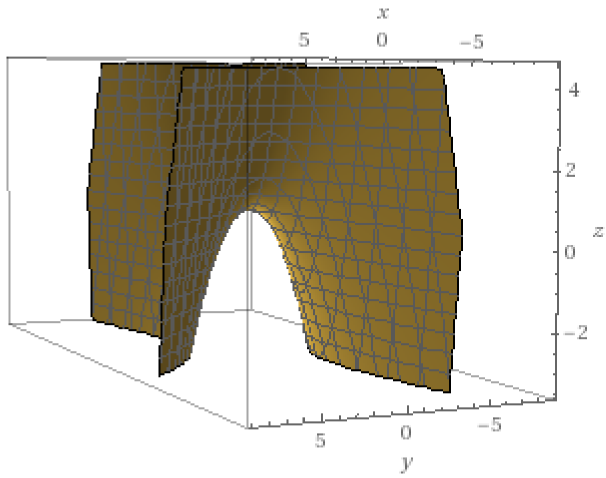
5.eset e és f kitérő egyenesek, és $\lambda = 1$

Legyen f egyenes: $y\cos\alpha = x\sin\alpha, z = 1$

$$\mathrm{d}(P,e) = \mathrm{d}(P,f)$$

$$\sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{(y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 + (z-1)^2}$$

Megoldáshalmaz egy hiperbolikus paraboloid.



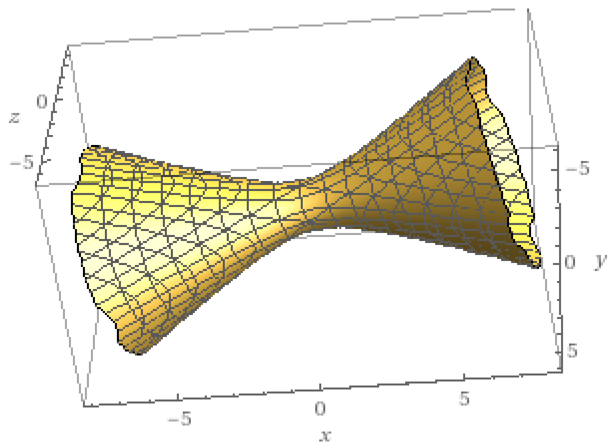
6.eset e és f kitérő egyenesek, és $\lambda \neq 1$

Legyen f egyenes: $y\cos\alpha = x\sin\alpha, z = 1$

$$\lambda \cdot \mathrm{d}(P,e) = \mathrm{d}(P,f)$$

$$\lambda\sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{(y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 + (z-1)^2}$$

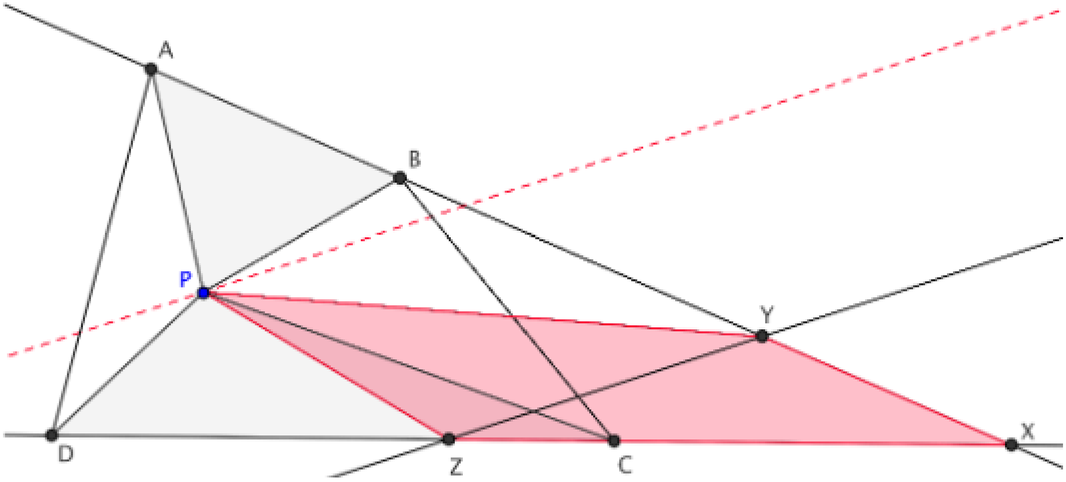
Megoldáshalmaz egy egyköpenyű hiperboloid.



3.feladat

Newton-tétel: *Egy érintőnégyszög beírt körének középpontja, és az átlók felezőpontjai egy egyenesre esnek.*

Legyen $ABCD$ egy tetszőleges érintőnégyszög. Jelölje AC és BD átlók felezőpontjait rendre E, F, a beírt kör középpontját pedig O.
Ha $ABCD$ rombusz, akkor $E = F = O$.
Ha $ABCD$ nem rombusz, akkor feltehetjük, hogy $AB \nparallel DC$.
Legyen ekkor X az AB és DC egyenesek metszéspontja.
Tegyük fel, hogy $|BX| < |AX|$ és $|CX| < |DX|$.
Legyen Y az a pont az AX szakaszon, melyre: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BA}$.
Legyen Z az a pont a DZ szakaszon, melyre: $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{CD}$.



Legyen $T_{ABCD} = k$. Keressük meg azon P pontok halmazát, melyekre: $T_{PAB} + T_{PCD} = \frac{k}{2}$

$$\frac{k}{2} = T_{PAB} + T_{PCD} = T_{PXY} + T_{PXZ} = T_{PXYZ} = T_{PYZ} + T_{XYZ}$$

Vegyük észre, hogy T_{XYZ} értéke fix, mivel X, Y, Z nem függenek P választásától. Tehát a keresett P pontok halmazát így írhatjuk le:

$$T_{PYZ} = \frac{k}{2} - T_{XYZ}$$

Tehát T_{PYZ} konstans. Az ilyen P pontok halmaza egy YZ-vel párhuzamos egyenes. *Newton egyenes*

Ezek után elég megmutatni, hogy E, F, O rajta vannak ezen az egyenesen:

$$T_{EAB} + T_{ECD} = \frac{1}{2}T_{CAB} + T_{ACD} = \frac{k}{2}$$

$$T_{FAB} + T_{FCD} = \frac{1}{2}T_{DAB} + T_{BCD} = \frac{k}{2}$$

$$T_{OAB} + T_{OCD} = \frac{1}{2}r(AB + CD) = \frac{1}{2}r(CD + DA) = \frac{k}{2}$$

4.feladat Jelölje a, b, c, d egyenesek irányvektorait rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$.
A feladatot vektorokkal megfogalmazva:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = 0$$

Be kell látni, hogy ekkor: $(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$
Használjuk a Lagrange-azonosságot:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{ad})$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{ab})(\mathbf{cd}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{ad})$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ab})(\mathbf{cd}) - (\mathbf{bd})(\mathbf{ac})$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = 0$$

5.feladat Legyenek a P_1, P_2, P_3, P_4, M, N pontok helyvektorai rendre: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$.

$$\frac{P_1M}{MP_2} = \gamma \text{ , és } \frac{P_3N}{NP_4} = \gamma$$

tehát:

$$\mathbf{m} - \mathbf{a} = \gamma(\mathbf{b} - \mathbf{m})$$
$$\mathbf{n} - \mathbf{c} = \gamma(\mathbf{d} - \mathbf{n})$$

Jelölje $(P_1, P_2, P_3, P_4), (P_1, P_3, M, N), (P_2, P_4, M, N)$ pontnégyesek súlypontjai rendre: S_1, S_2, S_3, helyvektoraik: $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}$$
$$\mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{m} + \mathbf{n}}{4}$$
$$\mathbf{s}_3 = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{d} + \mathbf{m} + \mathbf{n}}{4}$$

Elég belátni, hogy S_2S_1 és S_1S_3 vektorok párhuzamosak.

$$S_2S_1 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{m}) + (\mathbf{d} - \mathbf{n})}{\mathbf{4}}$$
$$S_1S_3 = \mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1 = \frac{(\mathbf{m} - \mathbf{a}) + (\mathbf{n} - \mathbf{c})}{\mathbf{4}} = \gamma\frac{(\mathbf{b} - \mathbf{m}) + (\mathbf{d} - \mathbf{n})}{\mathbf{4}}$$

Tehát S_1, S_2, S_3 pontok egy egyenesre esnek, és az osztási arány:

$$\frac{S_1S_3}{S_2S_1} = \gamma$$

Jelölje a pontnégyesek által meghatározott tetraéderek körülírt gömbjeit rendre: Q_1, Q_2, Q_3
Nem igaz, hogy Q_1, Q_2, Q_3 is egy egyenesre esnének. Bizonyításhoz elég egy ellenpélda:
$P_1 = (0, 0, 0)^T, P_2 = (1, 0, 0)^T, P_3 = (0, 1, 0)^T, P_4 = (0, 0, 1)^T$ és $\gamma = 1$
Ekkor: $M = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T, N = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$
Innen a gömbök középpontja:

$$Q_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2, Q_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right)^T, Q_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)^T$$

Látható, hogy Q_1, Q_2, Q_3 nem esik egy egyenesre.